東大数学パトロール（02 回）

—数学Ⅰと数列の不等式に遊ぶ

■“不等式”に死す？

ルキノ・ビスコンティの有名な映画に『ヴェニスに死す』(1971 年作）というのがあります. ご覧になった方もいらっしゃるかもしれませんが, 原作はトーマス・マン (1875～1955), 音楽はあのグスタス・マーラー．ここでは詳しく解説しませんが，これは要するに，マンの分身ともおぼしき老芸術家アッシェンバッハが，“美”にとりつかれてヴェニスの避暑地で死を迎えるというお話です.

“美”は時に危険なものであり，これは数学の世界の**“不等式の美”**でも同じです．不等式は，いわば“大人の形”でその美しさを受験生に垣間見せてくれるのですが，実は多くの受験生が，不等式と言えば，これを不正確で曖昧な評価，醜い不純な妥協の産物，そして，高校数学の脇役，と考えているフシがあります. あまつさえ，そのために “不等式”の泥濘(ぬかるみ)に足を取られ，あるいはその美にからめとられて，そこで溺死していく受験生を，これまで私は数多く見てきました.

あらためて言うまでもありませんが，中学数学が“等式”の世界であったとすれば，

高校数学は“不等式”の支配する世界

だと言っても過言ではありません．今回のブログを通して，この点を，読者の方々に十分納得していただきたいと考えています.

不等式がいかに重要であるか，これを理解してもらうために，少し難しい話になりますが，“不等式”で数学のノーベル賞とも言うべきフィールズ賞を受賞した男を紹介します. ドイツ生まれの英国の数学者 K.F.ロス（Klaus Friedrich Roth;1925～2015）という人で，

彼は 1955 年に「$\mu > 2$ とすれば，$\left| x - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{q^{\mu}}$ を満足する分数 $\dfrac{p}{q}$（p, q は整数）は，x が代数的数の場合には，もはや有限個しか存在しない」という驚くべき定理を証明しました.

ここで，「代数的数」とは，有理数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ を係数とする方程式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

の解となりうる実数 x のことをいいます. 常識的に考えれば，不等式を満足する分数は無限個あるような気がするのですが，「もはや有限個しか存在しない」と言い切ったところが凄いところです．ロスはこの“不等式”の仕事で，1958 年エディントンで開かれた第 13 回国際数学者会議でフィールズ賞を受賞したのです.

これから２回に亙って，読者の方々が「不等式に死す」なんてことがないように，アドヴァイスしていきたいと考えていますが，**今回は，「数学Ｉと数列」に関する不等式，次回は「微分法と積分法」に関する不等式**を取り上げていきます．

まずはじめに，今年（2020 年）の東大・理科の基本的な問題から考えてみましょう．なお，以下の［解説］の中で，

$\vee$（または），$\exists$（存在記号，存在する，some），$\mathbb{R}$（実数全体の集合）

といった記号を用いていますが，すでにその意味をご承知のものとして解説をしていきます．また，今後，

$\wedge$（かつ），$\forall$（全称記号，すべての，all），$\mathbb{N}$（自然数全体の集合），

$\mathbb{Z}$（整数全体の集合），$\mathbb{Q}$（有理数全体の集合），$\mathbb{C}$（複素数全体の集合）

といった記号もときどき登場することもありますので，その定義をよく頭に入れておいてください．

【２・１】 a,b,c,p を実数とする．不等式

$$ax^2+bx+c>0,\quad bx^2+cx+a>0,\quad cx^2+ax+b>0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする．

（１）a,b,c はすべて 0 以上であることを示せ．

（２）a,b,c のうち少なくとも１個は 0 であることを示せ．

（３）$p=0$ であることを示せ．

［解説］ ４つの実数の集合 A,B,C,P を

$$A=\{x\mid ax^2+bx+c>0\},\quad B=\{x\mid bx^2+cx+a>0\},$$
$$C=\{x\mid cx^2+ax+b>0\},\quad P=\{x\mid x>p\}$$

のように定めておくと，仮定より

$$A\cap B\cap C=P\quad\cdots(*)$$

（１）「$a\geq 0$ かつ $b\geq 0$ かつ $c\geq 0$」であることを，背理法で示す．そこで，

$$a<0\quad\text{または}\quad b<0\quad\text{または}\quad c<0$$

と仮定する．いま，とくに $a<0$ とすると，x を十分大きくとると，

$$ax^2+bx+c<0\qquad\therefore\quad A\not\supset P$$

一方，（$*$）より，$A\supset(A\cap B\cap C)=P$．これは矛盾である．よって，

$$a\geq 0$$

同様に，$b<0$ としても矛盾．$c<0$ としても矛盾．よって，$b\geq 0$，$c\geq 0$．

以上により，題意は示された．□

（２）「$a=0$ または $b=0$ または $c=0$」であることを，背理法で示す．そこで，「$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ かつ $c\neq 0$」とする．すなわち，（１）の結果を考慮して

$$a>0\quad\text{かつ}\quad b>0\quad\text{かつ}\quad c>0$$

とする．このとき，

$$y=ax^2+bx+c\ ,\quad y=bx^2+cx+a\ ,\quad y=cx^2+ax+b$$

のグラフを考えると，これらはすべて下に凸だから，

$\exists q_1 : \{x \mid x < q_1\} \subset A$ （$\{x \mid x < q_1\} \subset A$ を満たす実数 q_1 が存在する）・・・①

$\exists q_2 : \{x \mid x < q_2\} \subset B$ ・・・②　　$\exists q_3 : \{x \mid x < q_3\} \subset C$ ・・・③

ただし，q_1, q_2, q_3 は実数である．そこで，$q = \min\{q_1, q_2, q_3\}$ （q_1, q_2, q_2 の最小値）とおくと

$$\{x \mid x < q\} \subset A \cap B \cap C (= P)$$

となって，これは（＊）に反する．よって，a, b, c のうち，少なくとも１個は０．□

（３）ｉ）a, b, c が，すべて０の場合；

$A = B = C = \varnothing$, $P \neq \varnothing$ だから，（＊）に矛盾する．

ii）a, b, c にうち，２つが０の場合；$a = b = 0$，$c > 0$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，

$$A = \{x \mid c > 0\} = \mathbb{R},\ B = \{x \mid cx > 0\} = \{x \mid x > 0\},$$

$$C = \{x \mid cx^2 > 0\} = \{x \mid x < 0 \vee x > 0\}$$

$$\therefore\ A \cap B \cap C = \{x \mid x > 0\} \qquad \therefore\ p = 0$$

iii）a, b, c のうち，１つだけ０の場合；$a = 0$，$b > 0$，$c > 0$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，

$$A = \{x \mid bx + c > 0\} = \left\{x \mid x > -\frac{c}{b}\right\},$$

$$B = \{x \mid bx^2 + cx > 0\} = \left\{x \mid x < -\frac{c}{b} \vee x > 0\right\},$$

$$C = \{x \mid cx^2 + b > 0\} = \mathbb{R}$$

$$\therefore\ A \cap B \cap C = \{x \mid x > 0\} \qquad \therefore\ p = 0$$

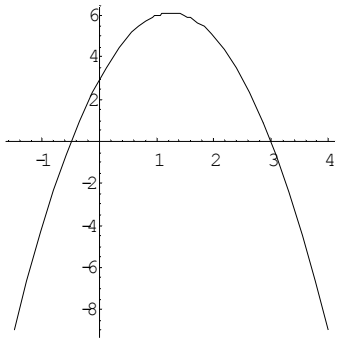
以上により，題意は示された．□

本問は，不等式と２次関数，集合・論理の数Ｉの総合問題で，基礎的な論証力をチェックするには最適，その意味では正に“東大的”な出題です．以下にいま少し補足説明をしておきます．

［解説］の（１）で，たとえば

$$a = -2,\ b = 5,\ c = 3$$

とすると，$y = -2x^2 + 5x + 3$ のグラフは右図のようになるので，



$$A = \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$$

したがって，$A \not\supset P$ になります．

一方，$A \supset (A \cap B \cap C) = P$ だから，$A \supset P$ で，これは明らかに矛盾です．したがって，$a \geq 0$ でなければなりません．

また，［解説］では，「x を十分大きくとると」と述べましたが，これを数Ⅲの極限の考え方を利用して表現すると，以下のようになります．すなわち，$a < 0$ とすると，

$$\lim_{x \to \infty}(ax^2 + bx + c) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) = -\infty$$

ということにほかなりません．

［解説］の（２）でも，「$a > 0, b > 0, c > 0$ とすると，

$$y = ax^2 + bx + c,\quad y = bx^2 + cx + a,\quad y = cx^2 + ax + b$$

のグラフを考えれば，これらはすべて下に凸だから」として，q_1, q_2, q_3 の存在に言及しましたが，これも数Ⅲの極限の考え方を利用して導くこともできます．すなわち，

$$\lim_{x \to -\infty}(ax^2 + bx + c) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) = +\infty$$

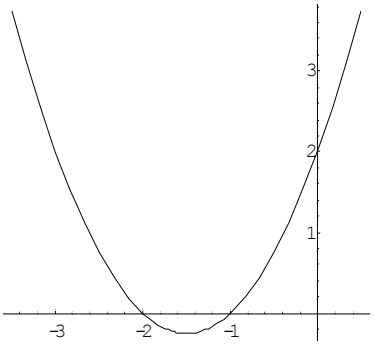
$$\lim_{x \to -\infty}(bx^2 + cx + a) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(b + \frac{c}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty}(cx^2 + ax + b) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(c + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right) = +\infty$$

となり，これより，q_1, q_2, q_3 の存在を主張できます．

具体例を考えてみましょう．いま，$a = 1$，$b = 3$，$c = 2$ とすると，，

$y = x^2 + 3x + 2$ のグラフは右図のようになるので，



$$A = \{x \mid x < -2 \vee x > -1\}$$

となります．したがって，たとえば，$q_1 = -3$ とすると①が成立します．また，②，③を成立さ

せるq_2, q_3は任意の実数でよいので，たとえば，$q_2 = q_3 = -1$とすると，$q = -3$になるというわけです.

２次関数のグラフの概形を自明とするならば，本問は**“論理と集合”**についてキチンとした議論さえ可能ならば，高校１年生の知識で十分対応できる問題です．本問を通して

自分自身を誤魔化さないで，論理的に愚直に考える

という基本がいかに大切であるかをあらためて自覚してほしいと思います.

ところで，本節の冒頭で触れたトーマス・マンは言うまでもなく，ドイツの文豪，1929年にはノーベル文学賞も受賞していますが，私も青春時代に『トニオ・クレーゲル』,『非政治的人間の考察』をはじめとするマンの作品をいくつか読んだものです．その中で特に印象に残っているのは『魔の山』で，これは青年ハンス・カストルプをめぐるいわゆる一種の「教養小説」ですが，第６章の“セテニブリーニ氏とナフタ氏との論争”は壮絶を極めたもので，若い私は興奮し夢中になったものです．この二人の“論理的言語バトル”の妙味は，日本の小説からは決して味わえないもので，その論争は「数学における論証」にも通底していて，ある意味では欧米文化の基幹部分に触れるにはもってこいの教材ではないかと考えています.

ドストエフスキー（1821～1881）の『カラマーゾフの兄弟』でも,『魔の山』同様の壮大な“言語バトル”が展開されますが，これらは謂わば“conversation novels”であり，この種の作品は欧米文化の伝統の産物と言えます．実際，その源流はすでに古代ギリシアのプラトンの一連の「対話編」に見られますが，私は数学の講義などそっちのけにして，プラトンの膨大な作品群を教材にして講義をしたいという誘惑に負けそうになります．なぜなら，“$\sqrt{2}$”が無理数であることを，背理法によって証明することを“知っている”大部分の受験生も，

「では，なぜ$\sqrt{2}$が無理数であることを証明しなければならないのか？」

という問いには答えることができないからです．これは，まったく滑稽な話ですが，実は受験生のみならず，敢えて言えば，背理法なる証明法を教える多くの数学教師自身も，それが分かっていないのです．プラトンの『国家（ポリテイア)』をはじめとする作品群は，こうした基本的な疑問にキチンと答えてくれます.

シモーヌ・ヴェイユ（1909～1943）は，フランスの高等中学校（リセ）の哲学教師を務めた女性ですが，学校の授業では「大学入学資格試験（バカロレア）に必要な知識を与える」ということにまったく無関心であり，生徒を相手にプラトンの『国家』を読ませ，ときに授業の中で数学の問題も議論していた，という奇特なエピソードの持ち主です.

先にも述べたように，私もまた，シモ‐ヌ・ヴェイユの顰（ひそみ）にならって，そんな授業をしてみたいと考えますが，それを実行すれば，即馘首（くび）になること必定，私にはシモーヌ・ヴ

ェイユの勇気はありません．実は，彼女自身は，そんな勇気ある授業をしていたために，リセの教師職を早々に解雇されてしまうのですが，興味のある方は『ヴェーユの哲学講義』（ちくま学芸文庫）を読まれるとよいでしょう．

なお，彼女の兄は，アンドレ・ヴェイユ（1906～1998）という 20 世紀を代表する大数学者，数論と代数幾何で多くの業績を残していて，彼は戦後来日したこともあり，受験生にはアンドレ・ヴェイユにも関心をもってもらいたいと思っています．そして彼を通して，東大卒の世界的な数学者，谷山豊や志村五郎を知るきっかけにしてもらえたら，とも思っています．志村五郎（1930～2019）には，比較的気楽に読めるエッセイ『記憶の切繪図』，『鳥のように』（筑摩書房）があり，これらも東大，京大などを志望する受験生諸君には，お薦めの本です．

本節の最後に，私自身の広告を．ここまで述べてきたことに興味と関心をお持ちの方は，いま私が「国語問題協議会」で連載しているブログ「日本語あやとり」のサイトを訪ねてみてください．下記が，その URL(Uniform Resource Locator)です．

http://kokugomondaikyo.sblo.jp/category//4374819-1.html

■典型的な数学Ⅰの不等式

実数世界における大小関係を考える場合，その基本は，２つの実数 a,b が与えられた場合，

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b$$

のいずれか１つだけが成り立つということで，私たちはこれを当然のこととして，議論を始めます．しかし，２つの実数が“何らかの形”で与えられた場合，これら３つの大小関係をいつも確定することができるのでしょうか？ここでは深入りしませんが，実は，高度に専門的な数学の世界では，２つの実数の定義の仕方によっては，大小関係が確定できないという，不思議なことも起こり得ます．“１”は，小学校以来“１”ですが，数Ⅲでは

$$1=0.999\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$$

のように“無限級数”でも定義されます．このようにある実数を“無限”を媒介にして定義した場合，大小関係が確定できない，という奇妙な現象も起きるのです．

もちろん，私たちの高校数学では，こんな問題は考えませんが，２つの実数が何らかの形で与えられた場合，ほんとうにこの２つの実数の大小関係は常に確定するのだろうか，といった問いを問うてみることは，根本的，根源的に物事を考えようとする人にとっては大切なことです．そしてこういう姿勢こそ，数学を学ぶ真の意義であり，そうした構えは，おそらく何らかの形で，将来役立つにちがいありません．

さて，以下に数学Ⅰで学ぶ３つの典型的な不等式を確認しておきましょう．

［Ⅰ］相加・相乗平均の不等式；$a>0$，$b>0$，$c>0$ とすると

（ｉ） $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$　　（ii） $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

［Ⅱ］コシー・シュワルツの不等式；

（ｉ） $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

（ii） $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$

［Ⅲ］チェビチェフの不等式；

（ｉ） $a_1 \geq a_2$，$b_1 \geq b_2$ のとき，

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2) \leq 2(a_1b_1+a_2b_2)$$

（ii） $a_1 \geq a_2 \geq a_3$，$b_1 \geq b_2 \geq b_3$ のとき，

$$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3) \leq 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

上の３つの不等式のほかに，三角不等式；

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

も重要ですが，これらの不等式が，さらに文字数を増やしで一般化されるのは，ご存じだと思います．［Ⅲ］の不等式に関連して，1992 年東北大・理系の後期に出題された次の問題を紹介しておきましょう．実は，東大ではこの種の“定理そのもの”と言ってもよいような問題は殆ど出題されませんが・・・．

【２・２】 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots\cdots \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \cdots\cdots \geq b_n$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

［解説］ 数学的帰納法で示す．$n=1$, のときは明らかに成り立つ．$n=2$ のとき，

$$a_1 \geq a_2,\ b_1 \geq b_2$$

であるから，

$$2(a_1b_1+a_2b_2)-(a_1+a_2)(b_1+b_2) = a_1b_1+a_2b_2-(a_1b_2+a_2b_1)$$
$$= (a_1-a_2)(b_1-b_2) \geq 0 \quad (\because\ a_1-a_2 \leq 0,\ b_1-b_2 \leq 0)$$

したがって，$n=2$ のとき不等式は成立する．

次に，２以上のある n で成り立つとする．このとき，

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots\cdots \geq a_n \geq a_{n+1},\ b_1 \geq b_2 \geq \cdots\cdots \geq b_n \geq b_{n+1} \quad \cdots(*)$$

に対して，

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i\right)$$

$$= (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}\right)$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

$$+(n+1)a_{n+1}b_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} b_i - a_{n+1}b_{n+1}$$

$$\geq n a_{n+1} b_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} b_i \quad (\because \text{ 帰納法の仮定})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{n+1} b_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_{n+1} b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_{n+1} b_{n+1} + a_i b_i - a_i b_{n+1} - a_{n+1} b_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1})(b_i - b_{n+1}) \geq 0 \quad (\because \quad (*))$$

以上により，題意の不等式は証明された．□

なお，この不等式には別の証明法もありますが，それについては問題【２・８】に関連して再論してみたいと思います．

次の問題は，1967 年の東大・文理共通・２次試験（東大では共通１次試験が始まる前年の 1978 年まで，１次と２次の試験があった）の問題です．私は，この年，開成高校から文Ｉに合格した，今でも付き合いのある英語教師の同僚から，この問題ができなかったことを直接聞いたことがありますが，さて読者諸君は如何に？この問題は，言ってみれば，パズル感覚で対処できるはずで，決して難しくはありません．

【２・３】 a が正の定数，n が正の整数ならば，$x \geq 0$ において不等式 $ax^{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x$ が成り立つことを証明せよ．

［解説］ 不等式を証明するには，

$$a^{\frac{n+1}{n}} x^{n+1} + 1 > a^{\frac{1}{n}} x \Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}} x\right)^{n+1} + 1 > a^{\frac{1}{n}} x$$

を示しておけばよい．すなわち，$X = a^{\frac{1}{n}} x \ (X \geq 0)$ とおくと，

$$X^{n+1} + 1 > X$$

を示しておけばよい．ところが，

$$X^{n+1} + 1 - X = (X-1)(X^n - 1) + X^n$$

ここで，

$0 \leq X < 1$ のとき，$X - 1 < 0$，$X^n - 1 < 0$ $\quad \therefore \quad (X-1)(X^n - 1) > 0$

$X \geq 1$ のとき，$X - 1 \geq 0$，$X^n - 1 \geq 0$ $\quad \therefore \quad (X-1)(X^n - 1) \geq 0$

よって，$(X-1)(X^n-1)+X^n>0$　　$\therefore$　$X^{n+1}+1>X$
すなわち，題意の不等式は示された．□

次は，1992 年東大・理科の問題．空間図形が絡んでいますが，ポイントは［Ｉ］の相加・相乗平均の不等式．いかにも，東大らしいものですが，方針の立て易い定型問題と言っても過言ではありません．なお，不等式［Ｉ］の証明の鍵は，

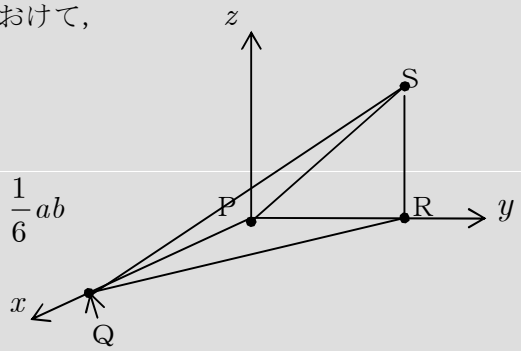
$$(\text{実数})^2 \geq 0$$

であり，等号は，その実数が 0 のとき，かつまたそのときに限って成り立つ，ということでした．これは，実数を特徴付ける最大のポイントで，この当たり前の事実は，強調しても強調し過ぎることはありません．

【２・４】 a,b を正の実数とする．座標空間の４点 P $(0,0,0)$，Q $(a,0,0)$，R $(0,1,0)$，S $(0,1,b)$ が半径１の同一球面上にあるとき，P，Q，R，S を頂点とする四面体に内接する球の半径を r とすれば，次の２つの不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3}, \qquad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

［解説］ 題意より球の中心は C $\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2},\frac{b}{2}\right)$ とおけて，



ＣＰ＝1 より，

$$a^2+b^2=3 \quad \cdots ①$$

四面体ＰＱＲＳの体積を２通りで表して，

$$\frac{1}{6}r\left(a+a\sqrt{1+b^2}+b+b\sqrt{1+a^2}\right)=\frac{1}{6}ab$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=2+\frac{3}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{4}{a^2b^2}} \quad (\because \ ①)$$

ここで，①と相加・相乗平均の不等式より，

$$3=a^2+b^2 \geq 2ab \qquad \therefore \quad \frac{1}{ab} \geq \frac{2}{3} \quad \cdots ②$$

したがって，$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq 2+3\cdot\frac{4}{9}+2\sqrt{1+4\cdot\frac{4}{9}}=\frac{20}{3}$

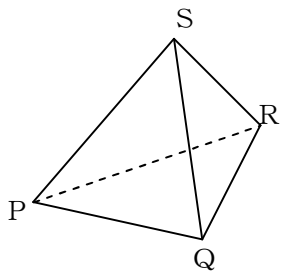
$$\therefore \quad \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3} \ \square$$

また，上の結果から，$\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\geq\sqrt{\dfrac{20}{3}}=2\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{\frac{5}{3}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}\quad(\because\quad ②)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}\geq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}\ \square$$

四面体ＰＱＲＳの外接球の中心Ｃは，線分ＰＱ，ＰＲ，ＰＳをそれぞれ垂直に二等分する平面上にあるので，その座標は，［解説］のようにおけます．



また，一般に四面体ＰＱＲＳに内接する球の中心をＣ，半径をrとすると，Ｃから４つの平面ＰＱＲ，ＱＲＳ，ＲＳＰ，ＳＰＱまでの距離は，すべてrだから，四面体ＰＱＲＳの体積をVとすると，

$$V=\frac{1}{3}r(\triangle\mathrm{PQR}+\triangle\mathrm{QRS}+\triangle\mathrm{RSP}+\triangle\mathrm{SPQ})$$

のようになります．これより

$$\frac{1}{6}r\left(a+a\sqrt{1+b^2}+b+b\sqrt{1+a^2}\right)=\frac{1}{6}ab$$

が得られるのは，直ちに了解できるでしょう．解説の後半は，単なる計算に過ぎません．

ところで，不等式の証明問題では，常に等号成立の条件に言及しなければならない，と思い込んでいる受験生がいますが，本問のような問題では，その必要はまったくありません．しかし，最大値や最小値を不等式を利用して求める場合には，等号が実際に実現するか否かが問題になりますので，このときは等号成立の条件は重要になります．

もちろん，問題によっては，等号成立の条件をストレートに問うものもあって，次の 1994 年の京大・後期の文理共通問題もその例です．基本的な論理的思考力を問う，いかにも京大らいしい問題です．

【２・５】 $a+b+c=0$ を満たす実数a,b,cについて、$\left(|a|+|b|+|c|\right)^2\geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ が成り立つことを示せ。また、ここで等号が成り立つのはどのような場合か。

［解説］ $a+b+c=0$に注意すると

$$\left(|a|+|b|+|c|\right)^2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$=a^2+b^2+c^2+2\left(|ab|+|bc|+|ca|\right)-2(a^2+b^2+c^2)$$

$$= 2\left(|ab| + |bc| + |ca|\right) - \left\{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)\right\}$$

$$= 2\left\{\left(|ab| + ab\right) + \left(|bc| + bc\right) + \left(|ca| + ca\right)\right\} \quad (\because \quad a+b+c=0)$$

ここで，一般にXが実数のとき，$|X| \geq -X \qquad \therefore \quad |X| + X \geq 0$

よって，　$\left(|ab| + ab\right) + \left(|bc| + bc\right) + \left(|ca| + ca\right) \geq 0$

$$\therefore \quad \left(|a| + |b| + |c|\right)^2 \geq 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \square$$

また，等号成立は，$|ab| + ab = 0$かつ$|bc| + bc = 0$かつ$|ca| + ca = 0$のときで，

（ｉ）「$a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0$」の場合

（ii）「$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$」の場合（（ｉ）の否定）

についてそれぞれ調べておく．

（ｉ）の場合；

$a = 0$とすると，$|ab| + ab = 0$，$|ca| + ca = 0$で，$b + c = 0$だから，

$$|bc| + bc - |b \cdot (-b)| + b \cdot (-b) = b^2 - b^2 = 0$$

したがって，このときは等号が成立する．

$b = 0$または$c = 0$としても同様に等号は成立する．

（ii）の場合；

$a \leq b \leq c$としても一般性を失わない．このとき，$b > 0$とすると，$c > 0$だから，

$bc > 0 \qquad \therefore \quad |bc| + bc = 2bc > 0$　すなわち　$|bc| + bc \neq 0$

また，$b < 0$とすると，$a < 0$だから，

$ab > 0 \qquad \therefore \quad |ab| + ab = 2ab > 0$　すなわち　$|ab| + ab \neq 0$

よって，この場合は等号は成立しない．

以上の考察より，等号成立条件は

$a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0$，すなわち$a, b, c$のうち少なくとも１つが$0$のとき$\square$

上の［解説］で，「$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$」のとき，$a + b + c = 0$，$a \leq b \leq c$と仮定しましたが，このとき$a < 0$，$c > 0$になります．

実際，$a > 0$とすると，

$b > 0$，$c > 0$だから，$a + b + c \neq 0 \qquad \therefore \quad a < 0$

また，$c < 0$とすると，

$a < 0$，$b < 0$だから，$a + b + c \neq 0 \qquad \therefore \quad c > 0$

となります．したがって，（ii）の場合，上の［解説］のように，bの符号に着目して議論することになるわけです．

不等式の証明では，単なる計算のみならず，“論理”が重要な鍵になることは，前節の今年の東大の問題や上の京大の問題で納得できるのではないかと思いますが，本節の最後に，“論理”がキイ・ポイントになるパズル的な息抜き問題を“行き掛けの駄賃”ということで２つ紹介しておきます．はじめは，1987 年の早大・政経の問題です．

【２・６】n 個の正の数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ がある。ただし、$n \geq 2$ とする。

$$A = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n \qquad B = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n}$$

とおくとき、A, B のうち少なくとも一方は n よりも小さくないことを証明せよ。

［解説］背理法で証明する．いま，A, B がともに n より小さいとすると

$$A + B < 2n$$

である．ところが相加・相乗平均の不等式から，

$$a_i + \frac{1}{a_i} \geq 2 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

だから

$$A + B \geq 2n$$

となり，これは明らかに不合理．よって，題意は示された．□

次は，1994 年の甲南大・文の問題で，早大の類題です．

【２・７】$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ を $0 < a_i < 1 \ (i = 1,2,3,\cdots\cdots,n)$ である n 個の実数とするとき、次の不等式のうち少なくとも１つは成り立つことを示せ。

$$a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n \leq \frac{1}{2^n}, \qquad (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

［解説］背理法で示す．いま

$$a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n > \frac{1}{2^n} \quad \text{かつ} \quad (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_n) > \frac{1}{2^n}$$

とする．このとき，辺々を掛け合わせると

$$a_1(1-a_1)\cdot a_2(1-a_2)\cdot\cdots\cdots\cdot a_n(1-a_n) > \frac{1}{4^n}$$

ところが，$0 < a_i < 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ であるから，

$$0 < a_i(1-a_i) = -\left(a_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad a_1(1-a_1)\cdot a_2(1-a_2)\cdot\cdots\cdots\cdot a_n(1-a_n) \leq \frac{1}{4^n}$$

となり，これは明らかに不合理である．よって，題意は示された．□

２題とも遊び感覚で解ける問題で，謂わば“非東大的”な問題ですが，しかしそれぞれの問題で求められている“論理的センス”は，前節で紹介した今年の東大の問題を想起して頂けばお分かりになると思いますが，東大数学でも思考力のヴィタミン剤になるのではないでしょうか．

■数列と不等式

さて，今回の最終節では“数列と不等式”の問題を紹介してみます．次回で取り上げる“微分積分”まで視野に入れると数列と不等式の問題は，東大数学の頻出テーマであると言っても過言ではありません．それもそのはず，すでに述べたように，解析学では

大きく見積もれ，小さく見積もれ，近づけろ！

が大きな柱になるからです．ちなみに，上の言葉は，関数解析学の大御所柴田敏男氏（1921～）の言葉ですが，元ネタは，フランスの一流の数学者ジャン・デュドネ（1906～1992）の『無限小解析』の序文の

Majorer　Minorer　Approcher

という言葉です．

デュドネには『人間精神の名誉のためにー数学讃歌』（高橋礼司訳・岩波書店）という著作があり，私も拙著『無限と連続ー哲学的実数論ー』（現代数学社）の結語で彼の言葉を引用したことがあります．ちなみに，この本が出版されたとき，世間からは「数学だけが人間精神の名誉のためにあるのではない」と数学者の傲慢と自惚れが非難され，揶揄されたそうですが，百科全書的な該博な知識の持ち主であったデュドネには，そうした俗悪な巷間の思いを超越した，数学への深い想いと洞察があったのではないかと私は考えています．

まず，1987 年の東大・理科の問題．これは，もはや定型的な標準問題と言ってもいいかもしれません．入試問題も，時代とともに少しずつその出題の意味が変化していくのです．

【２・８】 n を２以上の自然数とする．$x_1 \geq x_2 \geq \cdots\cdots \geq x_n$ および $y_1 \geq y_2 \geq \cdots\cdots \geq y_n$ を満足する数列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ および $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ が与えられている．$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ を並べかえて得られるどのような数列 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ に対しても

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ．

［解説］ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2$ ・・・（＊）

$$（＊）\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(x_i^2 - 2x_jy_j + y_j^2) \leq \sum_{j=1}^{n}(x_j^2 - 2x_jz_j + z_j^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}x_jy_j \geq \sum_{j=1}^{n}x_jz_j \quad \left(\because \sum_{j=1}^{n}y_j^2 = \sum_{j=1}^{n}z_j^2\right) \cdots ①$$

①を数学的帰納法を用いて示しておく．

（ｉ）$n = 2$ のとき，

①の右辺が $x_1y_1 + x_2y_2$ のときは，①は明らかに成り立つので，$x_1y_2 + x_2y_1$ のときを示す．

$x_1y_1 + x_2y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$　（$\because$　$x_1 \geq x_2$，$y_1 \geq y_2$）

よって，①は成り立つ．

（ii）2 以上のある n に対して，①が成り立つと仮定する．いま，

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots\cdots \geq x_n \geq x_{n+1}, \qquad y_1 \geq y_2 \geq \cdots\cdots \geq y_n \geq y_{n+1}$$

と仮定する．このとき，

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j y_j \geq \sum_{j=1}^{n+1} x_j z_j \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

が成り立つことを示す．

x_1 の相手が y_1，すなわち $z_1 = y_1$ のときは帰納法の仮定より②は明らかに成り立つ．そこで，x_1 の相手が y_1 でないとき，すなわち x_1 の相手が $y_k\,(k \neq 1)$，y_1 の相手が $x_l\,(l \neq 1)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} x_j z_j &= x_1 y_k + x_2 z_2 + \cdots\cdots + x_l y_1 + \cdots\cdots + x_n z_n + x_{n+1} z_{n+1} \\
&\leq x_1 y_1 + x_2 z_2 + \cdots\cdots + x_l y_k + \cdots\cdots + x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1} \\
&\qquad\qquad (\because\ x_1 \geq x_l,\ y_1 \geq y_k) \\
&\leq x_1 y_1 + \sum_{j=2}^{n+1} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n+1} x_j y_j \qquad (\because\ \text{帰納法の仮定})
\end{aligned}$$

したがって，$n+1$ のときもン成り立つ．

以上（ｉ），（ii）から不等式は示された．□

本問の不等式の意味を，一言で述べれば，

分相応な相手を選んだとき最大になる

ということで，x_1 の相手として y_1 を，x_2 の相手として y_2 を，といったように“分相応”の相手を選んだとき，それらの積の総和が最大になる，ということです．

これを利用すると，［２・２］の不等式は，以下のように示すこともできます．すなわち，

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_{n-1}b_n + a_nb_1$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_{n-1} + a_2b_n + \cdots + a_{n-1}b_{n-3} + a_nb_{n-2}$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1}$$

が成り立ち，これらの n 個の不等式を辺々加えると，

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$\therefore\quad n\sum_{i=1}^{n} a_ib_1 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

これが，［２・２］で証明した不等式でした．

次の 1984 年の一橋大の問題も類題として紹介しておきましょう．もはや，パズル感覚で考えることができると思いますが，こうしたセンスを知らず知らずのうちに身につけることが，いわゆる“数学的センス”の強化につながるのです．

【２・９】（１）実数a,b,c,dの大小関係が$a>b>c>d$であるとき，３つの数$ab+cd$，$ac+bd$，$ad+bc$の大きさを比較せよ．

（２）$2n$個の実数$x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_{2n}$の大小関係が

$$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_{2n}$$

であるとする．これら$2n$個の数を２個ずつからなるn個の組に分け，組にした数どうしの積をつくり，それらn個の積の総和を考える．このとき最も大きな総和が得られる組み分けの仕方はどのようなものか．また最も小さな総和が得られる組み分けの仕方はどのようなものか．

［解説］（１）$a>b>c>d$のとき，

$$ab+cd-(ac+bd)=a(b-c)-d(b-c)=(a-d)(b-c)>0$$

$$\therefore\quad ab+cd>ac+bd\ \cdot\cdot\cdot①$$

$$ac+bd-(ad+bc)=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)>0$$

$$\therefore\quad ac+bd>ad+bc\ \cdot\cdot\cdot②$$

よって，①，②から，$ab+cd>ac+bc>ad+bc$

（２）（ｉ）最も大きな総和が得られる組合せ；

$x_1>x_2>x_k>x_l\ (3\leq k<l\leq 2n)$のとき，（１）の結果とから，

$$x_1x_2+x_kx_l>x_1x_k+x_2x_l>x_1x_l+x_2x_k$$

したがって，(x_1,x_2)の組を含むものが最大．

次に，$2n-2$個の実数

$$x_3>x_4>x_5>\cdots>x_{2n}$$

に対して，$x_3>x_4>x_k>x_l\ (5\leq k<l\leq 2n)$のとき，上と同様に考えて

$$x_3x_4+x_kx_l>x_3x_k+x_4x_l>x_3x_l+x_4x_k$$

したがって，このとき(x_3,x_4)を含むとき最大，以下，同様に考えると，最も大きな総和が得られる組合せは

$$\left\{(x_1,x_2),(x_3,x_4),\cdots,(x_{2n-1},x_{2n})\right\}\square$$

（ⅱ）最も小さな総和が得られる組合せ；

$x_1>x_k>x_l>x_{2n}\ (2\leq k<l\leq 2n-1)$のとき，（１）の結果から

$$x_1x_k+x_lx_{2l}>x_1x_l+x_kx_{2l}>x_1x_{2l}+x_kx_l$$

したがって，(x_1,x_{2n})の組を含むものが最小．

次に，$2n-2$個の実数

$$x_2>x_3>x_4>\cdots>x_{2n-1}$$

に対しても同様に考えると，(x_2,x_{2n-1})を含むとき最小．以下，同様に考えると，最も小さな総和が得られる組合せは

$$\left\{(x_1,x_{2n}),(x_2,x_{2n-1}),\cdots,(x_n,x_{n+1})\right\}\square$$

（1）の大小関係を予想するには，たとえば$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$とすると，

$$ab+cd=14,\quad ac+bd=11,\quad ad+bc=10$$

となり，これより$ab+cd>ac+bd>ad+bc$という大小関係が得られます．

［２・８］,［２・９］の類題は，このほかにも慶大・経済や千葉大・理系など多くの大学で出題されていますが，これらの問題で扱われた不等式は，もはや受験生の“常識”になったといっても過言ではないでしょう．

少し，目前（めさき）を変えて，今度は，1971 年東大・二次の文理共通問題を取り上げてみましょう．（1）は定型問題ですが，（2）の後半は，やはり東大だな，と思わせる良問です．

【２・１０】正数xを与えて，$2a_1=x$，$2a_2=a_1{}^2+1$，…，$2a_{n+1}=a_n{}^2+1$，…のように数列$\{a_n\}$を定めるとき

（1）$x\neq 2$ならば，$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$となることを証明せよ．

（2）$x<2$ならば，$a_n<1$なることを証明せよ．このとき，正数εを$1-\dfrac{x}{2}$より小となるようにとって，$a_1,a_2,\cdots,a_n$までが$1-\varepsilon$以下となったとすれば，個数nについて次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$2-x>n\varepsilon^2$$

［解説］（1）$a_1=\dfrac{x}{2}(\neq 1)$より，

$$a_2-a_1=\frac{a_1{}^2+1}{2}-a_1=\frac{(a_1-1)^2}{2}>0\qquad\therefore\quad a_1<a_2$$

また，$a_2=1$とすると$a_1{}^2=1$．$a_1>0$より$a_1=1$となって矛盾．　$\therefore\quad a_2\neq 1$

次に，2 以上のあるnに対して，

$$(0<)a_{n-1}<a_n\quad\text{かつ}\quad a_n\neq 1$$

と仮定する．このとき，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n{}^2+1}{2}-a_n=\frac{(a_n-1)^2}{2}>0\qquad\therefore\quad a_n<a_{n+1}$$

また，$a_{n+1}=1$とすると，$a_n=1$となって矛盾．以上のことから，

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots\square$$

（2）$x<2$のとき，$a_1=\dfrac{x}{2}<1$．また，$1-a_2=1-\dfrac{a_1{}^2+1}{2}=\dfrac{1-a_1{}^2}{2}>0$ だから，$a_2<1$．さらに，2 以上のあるnで，$a_n<1$とすると，

$$1-a_{n+1}=1-\frac{a_n{}^2+1}{2}=\frac{1-a_n{}^2}{2}>0\qquad\therefore\quad a_{n+1}<1$$

よって，すべてのnで，$a_n < 1$である．□

また，$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n \leq 1-\varepsilon < a_{n+1} < 1$に注意すると，

$$1-a_1 > 1-a_2 > \cdots > 1-a_n \geq \varepsilon \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

であるから，

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(1-a_k)^2}{2} > \frac{\varepsilon^2}{2} \ (k=1,2,\cdots,n-1) \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(1-a_n)^2}{2} \geq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

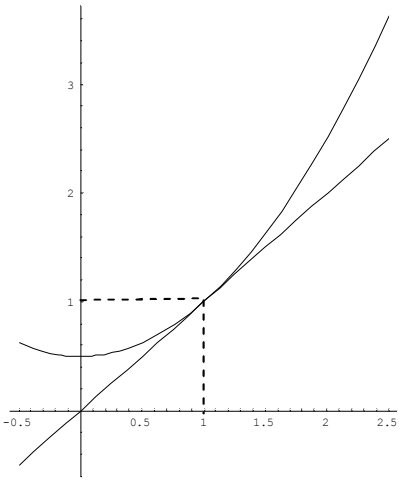
よって，

$$a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) + (a_{n+1} - a_n) > (n-1)\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{n\varepsilon^2}{2}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} - \frac{x}{2} > \frac{n\varepsilon^2}{2}$$

$a_{n+1} < 1$だから，$1 - \dfrac{x}{2} > \dfrac{n\varepsilon^2}{2}$　　$\therefore \quad 2 - x > n\varepsilon^2$ □

$y = \dfrac{x^2+1}{2}$と$y = x$のグラフは，右図のように，点$(1,1)$で接するから，（1）の結果は，右図からほとんど明らかでしょう．



また，②において，$k = n-1$とすると，下の数直線から，直ちに

$$a_n - a_{n-1} = \frac{(1-a_{n-1})^2}{2} > \frac{\varepsilon^2}{2}$$

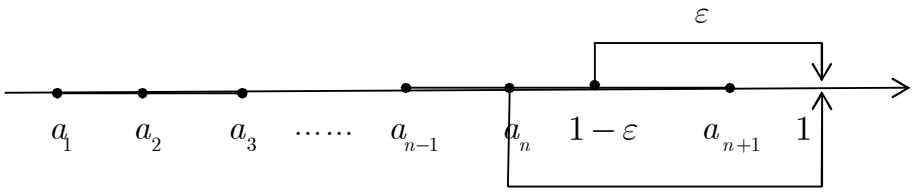
と分かり，したがって①より，

$$k = 1,2,\cdots,n-2$$

に対しても

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(1-a_k)^2}{2} > \frac{\varepsilon^2}{2}$$

が成り立つことが了解できるはずです..



次は，複素数列と不等式の問題．1999 年の東大・理科の問題です．一見，厄介な印象を持ちますが，方針の立て難い問題ではありません．東大の問題だからと言って，すべてがすべて，非定型的な問題というわけではありません．

三角不等式を利用する定型問題ですが，むしろ計算力が鍵になります．一般に，東大数学と言えば，直ぐに“数学的センス”ということを思い浮かべる人が多いのですが，一般に京大よりも東大の方が地道な計算を要求している問題が多いことは頭に入れておきたいことです．

【２・１１】複素数z_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ を$z_1=1$，$z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$ のよって定める．ただし，i は虚数単位である．

（１）すべての自然数n について$\dfrac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$ が成り立つことを証明せよ．

（２）実数$r>0$ に対して$|z_n|\leq r$ を満たすz_n の個数を$f(r)$ とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\log r}$ を求めよ．

［解説］（１）$z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$・・・①

$\alpha=(3+4i)\alpha+1$ を解くと，$\alpha=\dfrac{-1+2i}{10}$ だから，①より

$$z_{n+1}-\alpha=(3+4i)(z_n-\alpha)\qquad\therefore\quad z_n-\alpha=(3+4i)^{n-1}\cdot\frac{11-2i}{10}\ (\because\quad z_1=1)$$

ここで，$|3+4i|=5$，$\left|\dfrac{11-2i}{10}\right|=\dfrac{\sqrt{11^2+(-2)^2}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ だから

$$|z_n-\alpha|=5^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$$

三角不等式；$|z_n|-|\alpha|\leq|z_n-\alpha|\leq|z_n|+|\alpha|$ と，$|\alpha|=\left|\dfrac{-1+2i}{10}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ より

$$|z_n|-\frac{\sqrt{5}}{10}\leq 5^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\leq|z_n|+\frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$\therefore\quad\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10\cdot 5^{n-1}}\right)5^{n-1}\leq|z_n|\leq\left(\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{10\cdot 5^{n}}\right)5^{n}$$

$n=1$のときは明らかに成り立つので，$n\geq 2$ とすると，$2.2<\sqrt{5}<2.3$ だから，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10\cdot 5^{n-1}}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10\cdot 5}=\frac{12\sqrt{5}}{25}>\frac{12\cdot 2.2}{25}=\frac{26.4}{25}>1>\frac{3}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{10\cdot 5^{n}}\leq\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{10\cdot 5^{2}}=\frac{26\sqrt{5}}{250}<\frac{26\cdot 2.3}{250}=\frac{59.8}{250}<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad\frac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}\ \square$$

（２）（１）の結果と$f(r)$の定め方から，

$$\frac{3\times 5^{n-1}}{4} \leq r \leq \frac{3\times 5^{n}}{4} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

のとき，$\left|z_n\right| < r$ を満たす z_n の個数 $f(r)$ は，

$f(r) = n-1$ または n．すなわち，$n-1 \leq f(r) \leq n$ ・・・②

①から，$\log\frac{3}{4} + (n-1)\log 5 \leq \log r \leq \log\frac{3}{4} + n\log 5$ ・・・③

②，③から，

$$\frac{n-1}{\log\frac{3}{4} + n\log 5} \leq \frac{f(r)}{\log r} \leq \frac{n}{\log\frac{3}{4} + (n-1)\log 5}$$

$r \to \infty$ のとき，$n \to \infty$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\log\frac{3}{4} + n\log 5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\log\frac{3}{4} + \log 5} = \frac{1}{\log 5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log\frac{3}{4} + (n-1)\log 5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\log\frac{3}{4} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\log 5} = \frac{1}{\log 5}$$

よって，上の不等式とはさみうちの原理とから

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r} = \frac{1}{\log 5} \ \square$$

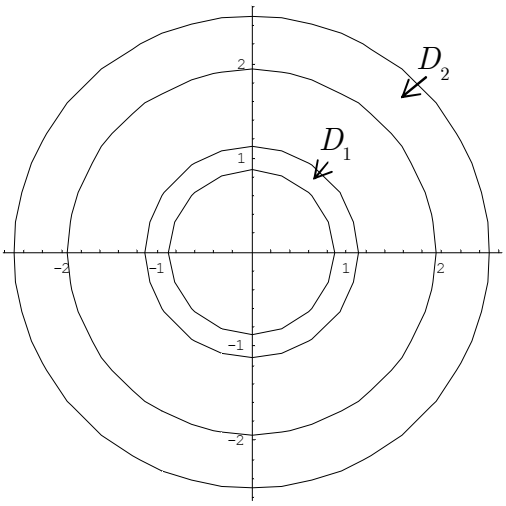
複素数平面の点集合 D_n を

$$D_n = \left\{ z \mid \frac{3\times 5^{n-1}}{4} < \left|z\right| < \frac{5^n}{4} \right\}$$

のように定めると，D_1, D_2 は右図のようになり，一般に

$$D_n \cap D_{n+1} = \varnothing$$

であるから，z_n と z_{n+1} が同時に D_n に含まれることはありません．



したがって，$\left|z_n\right| \leq r$ を満たす z_n の個数 $f(r)$ を考えるには，基本的には，領域 $\left|z\right| \leq r$ が，領域 D_n を何個含んでいるかを考えればよい，ということになります．

なお，上の［解説］で，r を①のように定めておきましたが，このところは，案外難しいというべきでしょう．

今回の最後に，次回への布石として，微積分の絡む不等式の証明問題を紹介しておきます．数列，場合の数，確率の総合問題で，2019 年の名大・理系で出題されたものです．いかにも名大らしい問題で，東大で出題されても不思議ではない問題です．

【２・１２】正の整数nに対して$1,2,\cdots,n$を一列に並べた順列を考える・そのような順列は$n!$個ある．このうち１つを等確率で選んだものを$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$とする．この$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$に対し，各添字$i=1,2,\cdots,n$について，a_iの値がjであるとき，そのjを添字にもつa_jの値がkであることを$a_i=j\to a_j=k$と書くことにする．ここで

$$a_i=j\to a_j=k\to a_k=l\to\cdots$$

のようにたどり，それを続けていく．例えば$(a_1,a_1,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=(2,5,6,1,4,3,7)$のとき，

（ｉ）$a_1=2\to a_2=5\to a_5=4\to a_4=1\to a_1=2$

（ii）$a_3=6\to a_6=3\to a_3=6$

（iii）$a_7=7\to a_7=7$

となり，どのiから始めても列は必ず一巡する．この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ．上の（ｉ），（ii），（iii）は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている．

（1）$n=3$とする．選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ．

（2）$n=4$とする．長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ．

（3）n以下の正の整数kに対して$\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\log(n+1)-\log k$を示せ．

（4）nを奇数とする．選んだ順列が長さ$\dfrac{n+1}{2}$以上のサイクルを含む確率pは$p>\log 2$を満たすことを示せ．

［解説］（1）長さ 1 のサイクルを含む順列は，

$$(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3),(1,2,3)$$

の 4 通りだから，求める確率は，

$$\frac{4}{3!}=\frac{2}{3}\ \square$$

（2）$a_i\neq i$（for all i）であり，「$a_i=j$かつ$a_j=i$」である箇所がないような順列が，長さ 4 のサイクルを含む順列である．したがって，a_1の値は，$2,3,4$のいずれかであり，

$a_1=2$のとき，$(a_2,a_3,a_4)=(3,4,1),(4,1,3)$

$a_1=3$のとき，$(a_2,a_3,a_4)=(1,4,2),(4,1,2)$

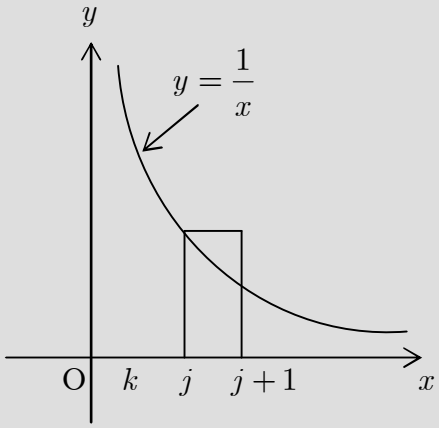
$a_1=4$のとき，$(a_2,a_3,a_3)=(1,2,3),(3,1,2)$

よって，長さ 4 のサイクルを含む順列は

$(2,3,4,1),(2,4,1,3),(3,1,4,2),(3,4,1,2),(4,1,2,3),(4,3,1,2)$ □

（3）$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを考えると，このグラフは単調減少であるから，j を

$$k \leq j \leq x \leq j+1 \leq n+1$$



なる整数とすると，右図からもわかるように

$$\frac{1}{j} \geq \frac{1}{x}\left(\geq \frac{1}{j+1}\right)$$

$$\therefore \quad \int_j^{j+1} \frac{1}{j}dx > \int_j^{j+1} \frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{j} > \int_j^{j+1} \frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \sum_{j=k}^{n} \int_j^{j+1} \frac{1}{x}dx$$

$$= \int_k^{n+1} \frac{1}{x}dx = \log(n+1) - \log k$$

よって，題意の不等式は示された．□

（4）順列が $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含むとき，それ以外のサイクルの長さは $\dfrac{n-1}{2}$ 以下であるから，その順列には $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルは唯一つしか含まれない．

長さ $j\left(j=\dfrac{n+1}{2},\dfrac{n+3}{2},\cdots,n\right)$ のサイクルを含む順列の個数を調べる．長さ j の順列を作る j 個の数の定め方は ${}_n\mathrm{C}_j$ 通りあり，たとえば，1から j までの数の作る長さ j のサイクルの作り方は，

$$1 \to b_2 \to b_3 \to \cdots \to b_j \quad (b_2, b\ ,\cdots, b_j \text{ は，2から } j \text{ の数})$$

において，$b_2, b_3, \cdots, b_j$ の定め方は $(j-1)!$ 通りあり，残りの $n-j$ 個の数の順列は $(n-j)!$ 通りある．したがって，長さ j のサイクルを含む順列の個数は

$${}_n\mathrm{C}_j \times (j-1)! \times (n-j)! = \frac{n!}{j}$$

よって，順列が長さ j のサイクルを含む確率は，$\dfrac{\frac{n!}{j}}{n!} = \dfrac{1}{j}$

したがって，長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は，（3）の結果とから

$$p = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log\frac{n+1}{2} = \log 2$$

$$\therefore \quad p > \log 2 \,\square$$

上の問題の背景には，n 個の文字の“置換”に関するテーマがあり，本問で考えた一巡するサイクルとは，要するに“巡回置換”であり，ここでは深入りできませんが，置換について考察していくと，いろいろと面白い性質が分かってきます．また，置換は，線形代数学の“行列式”を定義する際や，群や体などの抽象代数学を考えていく際にも必須のアイテムになります．機会があれば，東大数学パトロールの“増刊号”ともいうべきもので，そのさわりの部分でも解説できたら，考えています．

次回のテーマは「微分積分と不等式」です．乞うご期待．