東大数学パトロール（03 回）

—微分法と積分法の不等式に遊ぶ

■微分法と不等式

微分積分と不等式とは切っても切れない関係にあることは，あらためて確認するまでもないことで，たとえば，微積分におけるもっとも基本的な極限値

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\,,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

を求めるにも，不等式は欠かすことができません．のみならず，高校数学では，当り前のように認めている，「関数 $f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続ならば，$f(x)g(x)$ も $x=a$ で連続である」という“定理”をキチンと証明する際にも，これは，不等式なくしては不可能なのです．もちろん，これらについてここで深入りすることはできませんが，前回も述べたように，“高校数学は不等式の支配する世界”であり，とりわけ

微分積分は不等式なくして考えていくことが不可能な世界

である，といった認識だけはもっておいてほしいと思っています．

まず，ウォーミングアップということで，次の 1968 年東大・理科の二次の問題を考えてみましょう．対数の絡む，基本的な問題です．

【３・１】次の問い（１），（２），（３）に答えよ．

（１） α が $0<\alpha<1$ を満たす有理数ならば，区間 $0\leq x\leq 1$ の上で不等式 $1+\dfrac{\alpha}{2}x\leq(1+x)^{\alpha}$ が成り立つことを示せ．

（２） 2^{200} の桁数はいくつか．またその最上位の数は何か．その理由を述べよ．

注１．たとえば $2^{10}=1024$ の桁数は４，最上位の数は１である．なおこの数が 10^3 に近いことに注意せよ．

注２．$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010$ であるが，この数値を証明に用いてはならない．

（３） $0.300<\log_{10}2<0.302$ であることを示せ．

［解説］（１） $f(x)=(1+x)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{\alpha}{2}x\right)$ とおくと，

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\frac{\alpha}{2}=\alpha\left\{(1+x)^{\alpha-1}-\frac{1}{2}\right\}$$

$0<\alpha<1$ より $-1<\alpha-1<0$ だから，$x>-1$ において，$(1+x)^{\alpha-1}$ は単調減少関数．

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha-1} \geq (1+1)^{\alpha-1} > 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad f'(x) > 0$$

したがって，$f(x)$ は単調増加関数．　$\therefore \quad f(x) \geq f(0) = 0$

$$\therefore \quad 1 + \frac{\alpha}{2}x \leq (1+x)^{\alpha}$$ （等号は，$x = 0$ のとき成立）・・・①□

（２）$2^{10} = 1.024 \times 10^3 = 10^3 \left(1 + 0.024\right)$ だから，$2^{200} = 10^{60}(1+0.024)^{20}$

不等式①から，$\left(1 + \frac{\alpha}{2}x\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 + x$ であるから，$\alpha = \frac{1}{20}$，$x = 0.96$ とおくと，

$$(1+0.024)^{20} = \left(1 + \frac{1}{40} \cdot 0.96\right)^{20} \leq 1 + 0.96 < 2$$

$\therefore \quad 10^{60} < 2^{200} < 2 \cdot 10^{60}$　　$\therefore$ 桁数＝61，最高位の数字＝1□

（３）（２）の結果から，$60 < 200\log_{10} 2 < \log_{10} 2 + 60$

$$\therefore \quad \frac{60}{200} < \log_{10} 2 < \frac{60}{199} \qquad \therefore \quad 0.3 < \log_{10} 2 < 0.3015\cdots$$

$$\therefore \quad 0.300 < \log_{10} 2 < 0.302 \ \square$$

上の解説で，

$$y = (1+x)^{\alpha-1} \ (< \alpha < 1)$$

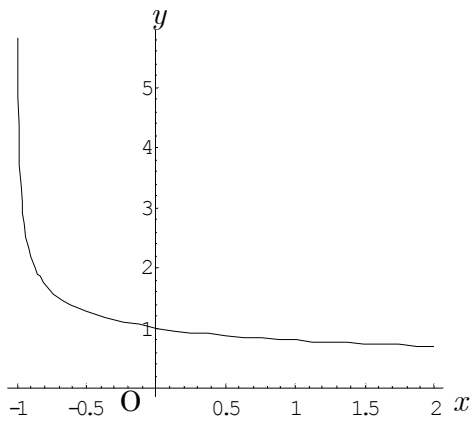
のグラフは，$x > -1$ のおいて単調に減少すると述べましたが，それを実感してもたうために，たとえば，

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

のとき，すなわち，

$$y = (1+x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$$

のグラフを，右上に示しておきます．



次の問題は，1994 年の東大・理科の問題，問題の背景を知れば，なかなか意味深な出題です．問題文を読んで，

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \cdots (*)$$

という“マクローリン級数”が連想できれば，あなたの実力は相当なものです．

【３・２】 $f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}$

$$g(x)=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120}$$

とする．このとき，以下のことが成り立つことを示せ．

（１）任意の実数xに対し，$f(x)>0$である．

（２）方程式$g(x)=0$はただひとつの実数解αをもち，$-1<\alpha<0$となる．

［解説］（１）$f(0)=\frac{1}{24}>0$だから，いま$x\neq 0$とする．このとき，$t=\frac{1}{x}$とおくと，

$$\frac{f(x)}{x^4}=\frac{1}{x^4}\left(x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}\right)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}\underset{put}{=}h(t)$$

ここで，

$$h'(t)=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!},\quad h''(t)=1+t+\frac{t^2}{2!}=\frac{1}{2}(t+1)^2+\frac{1}{2}>0$$

したがって，$h'(t)$は単調増加であり，

$$\lim_{t\to-\infty}h'(t)=-\infty,\qquad \lim_{t\to+\infty}h'(t)=+\infty$$

であるから，$h'(t)=0$を満たすtが唯一つ存在する．いまそれを$t_0(\neq 0)$とすると，

$t<t_0$で$h'(t)<0$，すなわち，$h(t)$は単調減少

$t>t_0$で$h'(t)>0$，すなわち，$h(t)$は単調増加

$$\therefore\quad h(t)\geq h(t_0)=h'(t_0)+\frac{t_0^{\,4}}{4!}=\frac{t_0^{\,4}}{4!}>0$$

$$\therefore\quad \frac{f(x)}{x^4}>0\qquad \therefore\quad f(x)>0\ (x\neq 0)$$

よって，$f(0)=\frac{1}{24}>0$を考慮して，$f(x)>0$（for all x）□

（２）$g(x)=0$の解は明らかに$x\neq 0$だから，

$$g(x)=0\Leftrightarrow\frac{g(x)}{x^5}=0$$

$t=\frac{1}{x}$とおくと，

$$\frac{g(x)}{x^5}=h(t)+\frac{t^5}{5!}\underset{put}{=}k(t)$$

であり，（１）の結果から

$$k'(t)=h(t)>0$$

すなわち，$k(t)$は単調増加である．また，

$$\lim_{t\to-\infty} k(t) = -\infty\,, \qquad k(-1) = \frac{11}{30} > 0$$

したがって，方程式$k(t) = 0$は，$t < -1$に唯一つの実数解をもつ．すなわち，

$$t < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$$

より，

$g(x) = 0$は，$-1 < x < 0$に唯一つの実数解をもつ□

本問を，$t = \dfrac{1}{x}$とおかないで，$f(x)$のまま処理してもできますが，計算がちょっと面倒になります．実際，（1）は

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{6}\,,\quad f''(x) = 12x^2 + 6x + 1 = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

より，$f'(x)$は単調増加であることが分かり，$f'(x) = 0$の解を$x = x_0$とすると，

$$f(x_0) = x_0^{\,4} + x_0^{\,3} + \frac{1}{2}x_0^{\,2} + \frac{1}{6}x_0 + \frac{1}{24} = f'(x_0) + \frac{1}{16}x_0^{\,2} + \frac{1}{16}x_0 + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{16}x_0^{\,2} + \frac{1}{16}x_0 + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}\left\{\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\} > 0$$

となります．

（2）も同様に議論をすすめようとすると，

$$g'(x) = 5x^4 + 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}$$

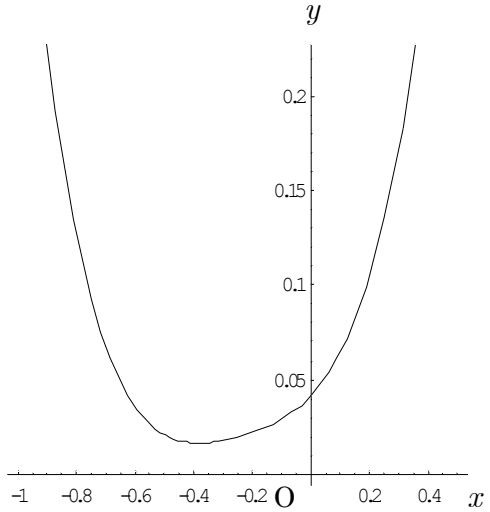
となり，上の解説のように（1）の結論を利用することは，かなり面倒になります．

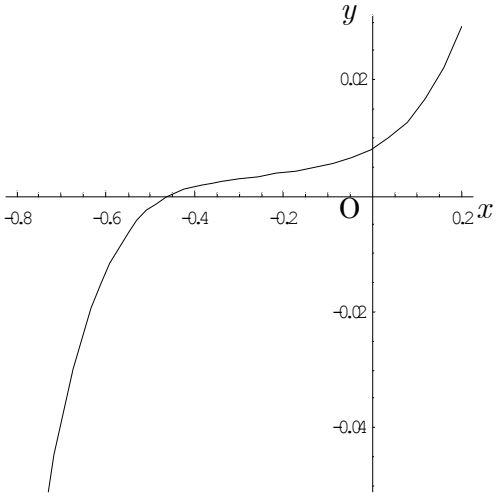
やはり，上の解説のように，

$$h(t) = h'(t) + \frac{t^4}{4!}\,,\quad k(t) = k'(t) + \frac{t^5}{5!}$$

を利用する方がよいでしょう．そのためには，（＊）からも分かるように，$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$について，$e^x = (e^x)'$が成り立つことが，了解されている必要があります．

最後に，$y = f(x)$のグラフ（左図）と$y = g(x)$のグラフ（右図）を紹介しておきます．（1），（2）が成り立つことが実感できるでしょう．





次は，2009 年の東大・理科の典型的な不等式の証明問題です．（２）は勿論，（１）の不等式の利用がポイントですが，東大では，この種の具体的数値の評価の問題は，しばしば出題されます．

【３・３】（１）実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ．

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

（２）次の不等式を示せ．$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$

［解説］（１）　$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ・・・（＊）

$-1<x<1$ だから，$1-x>0$，$1+x>0$ である．したがって，$x\neq 0$ のとき，（＊）の両辺に $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ をかけて，

$$\begin{aligned}(*)\ &\Leftrightarrow 1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}\ \cdots ①\\ &\Leftrightarrow \log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1-x^2)\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left\{\log(1-x^2)-x\log(1-x)\right\}>0\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=\log(1-x^2)-x\log(1-x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-2x}{1-x^2}-\left\{1\cdot\log(1-x)+x\cdot\frac{-1}{1-x}\right\}\\ &=-\frac{2x-x(1+x)}{1-x^2}-\log(1-x)\end{aligned}$$

$$= -\frac{x}{1+x} - \log(1-x)$$

$$f''(x) = -\frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{1-x}$$

$$= \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{x(3+x)}{(1+x)^2(1-x)}$$

したがって，$f''(x)$ の符号は $x=0$ の前後で負から正に変化するので

$f'(x)$ は，$x<0$ で単調減少，$x>0$ で単調増加

となり，$f'(0)=0$ に注意すると

$$f'(x) \geq 0$$

よって，$f(x)$ が単調増加関数であることが分かる．すなわち，$f(0)=0$ より

$$-1<x<0 \text{ のとき} \frac{1}{x} f(x) > 0$$

$$0<x<1 \text{ のとき} \frac{1}{x} f(x) > 0$$

よって，①が成り立つことが分かり，題意の不等式（＊）は示された．□

（２）①において，$x=0.01$ を代入すると，

$$0.99 < 0.9999^{100}$$

また，（＊）の両辺に $(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ を掛けると，

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}} < 1+x \quad \cdots ②$$

②において，$x=-0.01$ を代入すると，

$$0.9999^{101} < 0.99$$

よって，題意の不等式は示された．□

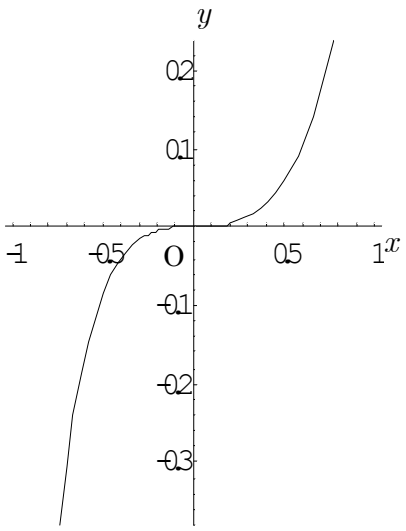
本問のポイントは，不等式（＊）；

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} <, (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

を，

$$1-x < (1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

のように変形するところであり，（＊）のまま対数をとることは避けたいものです．要するに指数を一方にまとめるという“自然な欲求”に従う，ということです．



なお，

$$y = f(x) = \log(1-x^2) - x\log(1-x) \quad (-1<x<1)$$

のグラフは右上図のようになります.

次は，2016 年東大・理科の問題で，これも典型的な不等式の証明問題です．前問同様，両辺の対数を考えて証明する，標準的（？）なもので，このような“教科書”の章末問題レベルも，東大でも出題されているのです.

東大の入試問題といえば，“すべて難問”と勘違いしている受験生は多いのですが，

敢えて言えば，“６題中３題は標準問題”と構えて取り組むべき

であり，その３題が完答できれば，数学に関しては十分合格圏に入ります．以下の問題は，その種の３題の中の１題と考えて下さい.

【３．４】 e を自然対数の底とする．すなわち，$e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

［解説］ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}\ (x>0)$ ・・・(＊)

$$(＊)\Leftrightarrow x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\ ・・・(＊＊)$$

$f(x)=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，

$$f'(x)=1\cdot\{\log(x+1)-\log x\}+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}\ ・・・①$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

したがって，$f'(x)$ は単調減少であり，①より

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)=0\qquad\therefore\quad f'(x)>0\ (x>0)$$

$\therefore$ $f(x)$ は単調増加

ここで，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\log e=1$

$\therefore$ $f(x)<1$ ・・・②

また，$g(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，

$$g'(x)=1\cdot\{\log(x+1)-\log x\}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}\quad\cdot\cdot\cdot③$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot x(x+1)-(2x+1)(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}>0$$

したがって，$g'(x)$ は単調慈増加であり，③より

$$\lim_{x\to+\infty}g'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right)=0\qquad\therefore\quad g'(x)<0$$

$\therefore\quad g(x)$ は単調減少

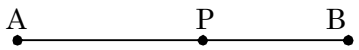
ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty,}\left(1+\frac{1}{2x}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$

$\therefore\quad g(x)>1\quad\cdot\cdot\cdot④$

よって，②，④より不等式（＊＊）は示された．

すなわち，不等式（＊）は成り立つ．□

上の問題は，自然対数の底“e”の評価の問題ですが，この数を**“ネイピア数”**と言います．ネイピア（J.Napier：1550～1617）はスコットランドの貴族で，この数を，右図のような線分 AB 上を A から B に向かう動点 P を考え，その速度が残り PB の長さに比例する運動を考えることによって，1614 年に，自然対数の考え方を発見したと言われています．詳しくは拙著『優雅な$e^{i\pi}=-1$へお旅』（現代数学社）の 111 頁から 114 頁を参照して頂ければと思います．



以下に，上の東大の問題の簡単な類題として，1993 年広島大・理の問題を紹介しておきましょう．

【３・５】自然数nに対して，関数$f_n(x)=x^ne^{-x}$を考える．

（１）$x\geq 0$における$f_n(x)$の最大値を求めよ．

（２）$n\geq 2$のとき，不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

が成り立つことを示せ．

［解説］（１）$f_n(x)=x^n e^{-x}$ であるから，

$$f_n{}'(x)=xx^{n-1}e^{-x}+x^n(-e^{-x})=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$$

したがって，$f_n{}'(x)$ は，$x=n$ の前後で，正から負に変化するので，$f_n(x)$ は $x=n$ で極大かつ最大である．よって，

$$f_n(x)\text{の最大値}=f_n(n)=n^n e^{-n}\ \square$$

（２）（１）の考察より，$f_n(n-1)<f_n(n)$

$$\therefore\quad (n-1)^n e^{-(n-1)}<n^n e^{-n} \qquad \therefore\quad e<\frac{n^n}{(n-1)^n}$$

$$\therefore\quad e<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \qquad \text{よって，}\ e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\ \cdots ①$$

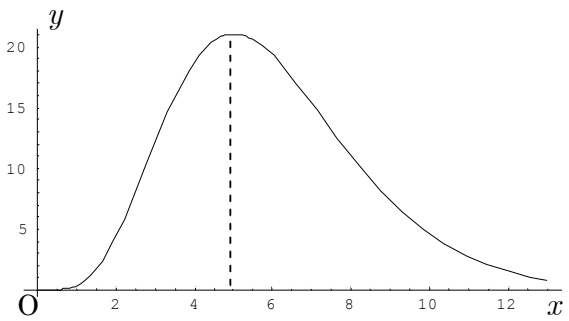
また，$f_n(n)>f_n(n+1)$

$$\therefore\quad n^n e^{-n}>(n+1)^n e^{-(n+1)} \qquad \therefore\quad e>\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$\therefore\quad e>\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad \text{よって，}\ e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ \cdots ②$$

したがって，①，②とから，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\ \square$

本問は，（１）の巧妙な誘導があるので，（２）の不等式の証明は簡単です．しかし，かつて私は，（２）の不等式だけの証明問題を試験に出したことがありますが，ほんどの受験生は，出来ませんでした．その意味では難問です．



なお，参考までに $y=f_5(x)=x^5e^{-x}$ のグラフを右上 に載せておきます．（１）の結果が実感できるでしょう．

ところで，【３・４】の問題文にもあったように，自然対数の底 e は，高校数学では

$$e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\quad (t\in\mathbb{R})\quad \cdot\cdot\cdot ①$$

あるいは，

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\quad (n\in\mathbb{N})\quad \cdot\cdot\cdot ②$$

のような形で導入されます．現在は①が主流のようです（このように定めておけば，②が成り立つのは明らか）が，私が高校生のときは，②の形で導入するのが一般的であったように記憶しています．そして，直感的に

② ⇒ ①

が，成り立つとして議論をすすめたものです．しかし，これは自明ではなく，キチンと証明しておかなければならないのですが，実は，並みの高校生にはかなり厄介な証明となります．ともあれ，現在では①を，ネイピア数“e”の出発点にしていますが，それはともかく，eを②のように定義したとき，数列

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

は，ほんとうに有限確定値に収束するのでしょうか？この問題も高校では，

$$a_{10}=\left(1+\frac{1}{10}\right)^{n}=2..5937\cdots,\quad a_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2.7018\cdots$$

$$a_{1000}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2.716\cdots,,\quad a_{10000}=\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}=2,718\cdots$$

のような例から，収束することを，証明なしで直感的に類推ぢているのが現状です．

収束することを示すには，実は

上に有界な単調増加数列は収束する

という定理（この定理を認めない数学者もいる！）を用いる必要がありますが，“上に有界であること”，また“単調増加数列であること”を示すのは，やはりそれなりに面倒です．さらに，【３・２】に関連した等式（＊）において，$x=1$とすると，

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

という等式が得られますが，これと

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

との関係についても，本来ならばキチンと議論しておく必要があります．これについては，ここでは深入りしませんが，興味のある方は，拙著『無限級数の解法研究』（聖文新社）の 11 頁〜14 頁を参照していただければと思います．

さて，本節「微分法と不等式」の最後は，2005 年東大・理科の問題です．これは，所謂“リプシッツ定数”が登場する標準問題で，類題はこれまでさまざまな大学で出題されている“頻出定型問題”です．

【３・６】関数 $f(x)=\frac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$ とする．ただし，e は自然対数の底である．

（１）$x>\frac{1}{2}$ ならば $0\le f'(x)<\frac{1}{2}$ であることを示せ．

（２）x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める．

$x_0>\frac{1}{2}$ であれば，$\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ．

［解説］（１）$f(x)=\frac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$ だから，

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}+\frac{1}{2}x\left(-2e^{-2(x-1)}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)},$$

$$f''(x)=-1\cdot e^{-28x-1)}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(-2e^{-2(x-1)}\right)=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

したがって，$f''(x)$ の符号ははは $x=1$ の前後で，負から正に変化するので，

$$x>\frac{1}{2}\text{ のおける }f'(x)\text{ の最小値}=f'(1)=0$$

また，
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\infty}f'(x)=\frac{1}{2}$$

よって，$x>\frac{1}{2}$ ならば，$0\le f'(x)<\frac{1}{2}$ □

（２）（１）より $x>\frac{1}{2}$ ならば，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $x>\frac{1}{2}$ で単調増加関数である．したがって，0 以上のある n で $x_n>\frac{1}{2}$ とすると，

$$x_{n+1}=f(x_n)>f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+e}{4}>\frac{1}{2}$$

よって，数学的帰納法より，

$$x_n > \frac{1}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

平均値の定理と $x_{n+1} = f(x_n)$，$f(1) = 1$ とから，

$$f(x_n) - f(1) = f'(c)(x_n - 1) \qquad \therefore \quad x_{n+1} - 1 = f'(c)(x_n - 1) \text{ ・・・①}$$

を満たす c が $x_n \left(> \frac{1}{2}\right)$ と $1\left(> \frac{1}{2}\right)$ の間に存在する．ここで，$c > \frac{1}{2}$ に注意すると，（1）の結果より $0 \leq f'(c) < \frac{1}{2}$ であるから，①とから

$$\left|x_{n+1} - 1\right| < \frac{1}{2}\left|x_n - 1\right| \quad \text{・・・②}$$

これを繰り返し用いて，　$0 \leq \left|x_n - 1\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|x_0 - 1\right|$

ここで，　$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|x_0 - 1\right| = 0$

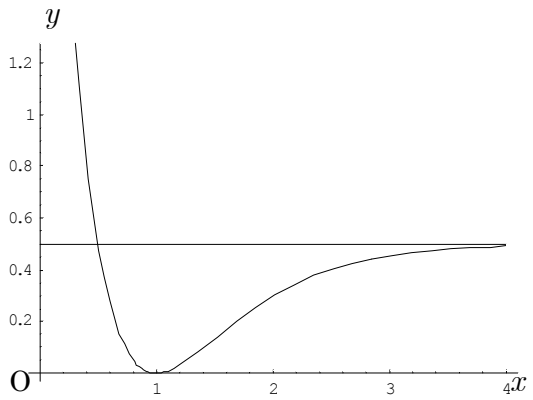
よって，はさみうちの原理により，$\lim_{n \to \infty} x_n = 1$ となり，題意は示された．□

$$y = f'(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2(x-1)}$$

のグラフは右図のようになり，$x > \frac{1}{2}$ ならば，

$$0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$$

であることが納得できるでしょう．



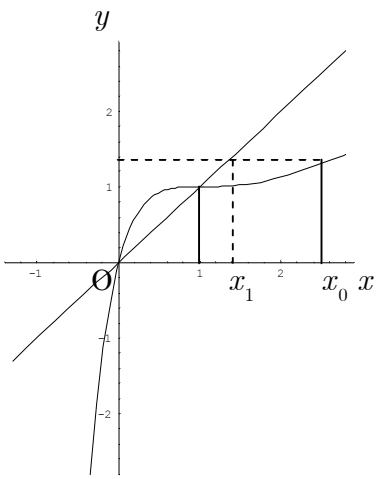
また，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフは右図のようになり，数列

$$\{x_n\} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

は，図のように定まっていくので，この数列が．

$$f(\alpha) = \alpha \quad (\alpha = 1)$$

を満たす点（**不動点**）α に収束していくことも直感的に了解できるでしょう．



なお，解説の不等式②における，“$\frac{1}{2}$”をリプシッツ定数といい，微分方程式の解の存在を証明するとき，**“関数解析学”**という分野では，常套手段として用いられます．19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて誕生した関数解析学は，関数の集合（関数空間）における個々の関数を，恰も“点”のように捉えていく学問で，その発想の広大さと深さとには実に驚くべきものがあります．興味のある方は，その豊饒な世界の発想だけでも，大学入学後に学び，人間知性の素晴らしさに触れてほしいものです．

■定積分と不等式

“定積分と不等式”も，東大のみならず，多くの大学で出題されている頻出テーマです．今回は，ごく標準的な東大の入試問題と最後に東工大の問題を紹介してみます．現役生にとっても決して難しいものではなく，いずれも入試会場で完答してほしい問題です．

はじめは，1995 年東大・理科の問題．

【３・７】 $f(x)=1-\sin x$ に対し，$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ とおく．このとき，任意の実数 x, y について

$$g(x+y)+g(x-y)\geq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ．

［解説］ $g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ であるから，

$$g'(x)=1\cdot\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$$

$$g''(x)=f(x)=1-\sin x\geq 0$$

したがって，$g'(x)$ は単調増加である．

いま，x を任意に選んで固定し（このとき，x は定数！），

$$F(y)=g(x+y)+g(x-y)-2g(x)$$

とおくと，

$$F'(y)=g'(x+y)-g'(x-y)$$

であるから，

$$y\geq 0 \text{ ならば } x+y\geq x-y \qquad \therefore\quad F'(y)\geq 0$$

$$y\leq 0 \text{ ならば } x+y\leq x-y \qquad \therefore\quad F'(y)\leq 0$$

すなわち，

$y\geq 0$ ならば，$F(y)$ は単調増加

$y\leq 0$ ならば，$F(y)$ は単調減少

よって，$F(y)\geq F(0)=0$ となり，x は任意であったから

$$g(x+y)+g(x-y)-2g(x)\geq 0$$

すなわち，題意の不等式は示された．□

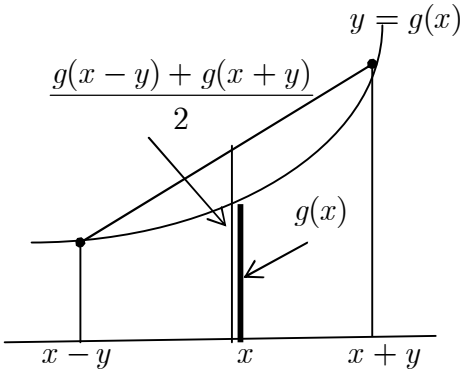
証明すべき不等式は

$$\frac{g(x+y)+g(x-y)}{2} \geq g\left(\frac{(x+y)+(x-y)}{2}\right)$$

と変形できるから，右図から分かるように，$g(x)$ が下に凸（正確には上に凸でない）であることを示しておけばよいことになります．ところが，

$$g''(x) = 1 - \sin x \geq 0$$

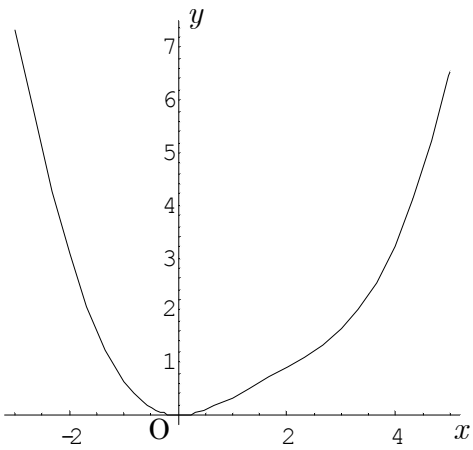
だから，これは明らかです．すなわち，直感的には，この不等式は自明です．



ちなみに，$g(x)$ を具体的に求めてみると，

$$\begin{aligned} g(x) &= x\int_0^x (1-\sin t)dt \\ &\quad -\int_0^x t(1-\sin t)dt \\ &= x\Big[t+\cos t\Big]_0^x \\ &\quad -\left[\frac{t^2}{2}+t\cos t-\sin t\right]_0^x \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \sin x \end{aligned}$$

となり，$y = g(x)$ のグラフは右下のように，確かに下に凸となります．



次は，1999 年東大・理科の問題．定積分値の評価のですが，π と e が登場します．

【３・８】 $\int_0^\pi e^x \sin^2 x dx > 8$ であることを示せ．ただし，$\pi = 3.14\cdots\cdots$ は円周率，$e = 2.71\cdots\cdots$ は自然対数の底である．

［解説］ $\int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = \int_0^\pi e^x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cos 2x dx$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}e^x\ (\cos 2x + \ 2\sin 2x\ )\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}(e^\pi - 1) - \frac{1}{10}(e^\pi - 1) = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)$$

したがって，

$$\int_0^\pi e^x \sin^2 x dx > 8 \Leftrightarrow \frac{2}{5}(e^\pi - 1) > 8 \Leftrightarrow e^\pi > 21 \cdot\cdot\cdot ①$$

ここで，$f(x) = e^x$ とおくと，$y = f(x)$ は下の凸のグラフであるから，$x \neq 3$ のとき，

$$f(x) > f'(3)(x-3) + f(3) \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

②で，$x = \pi$ とおくと，

$$f(\pi) > f'(3)(\pi - 3) + f(3) = e^3(\pi - 3) + e^3$$
$$= e^3(\pi - 2) > 2.7^3 \times 1.1 \quad (\because \quad e > 2.7\ ,\ \ \pi > 3.1)$$
$$= 21.6513 > 21$$
$$\therefore \quad e^\pi > 21$$

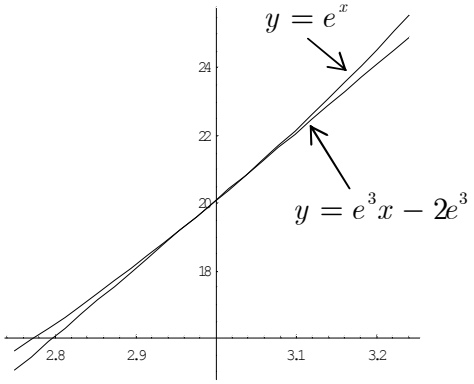
すなわち，①が示されたので，題意の不等式は示された．□

$y = e^x$ と $y = e^3(x-3) + e^3 = e^3 x - 2e^3$

のグラフは右図のようになるので，

$$e^\pi > 21$$

が了解できるはずです．



ところで，上の解説における

$$\int e^{2x} \cos 2x dx$$

は，部分積分を２回繰り返して以下のように計算するのが定石です．すなわち

$$\int e^x \cos 2x dx = \int (e^x)' \cos 2x dx = e^x \cos 2x - \int e^x (-2\sin 2x) dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx$$

$$\therefore \quad \int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) \cdot\cdot\cdot ③$$

一般に，a, b を定数とすると，

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx)$$

が成り立ちます．ただし，積分定数は省略してあります．これは行列（残念ながら今の課程では登場しない）を用いると以下のように簡単に導けます．

簡単のために，$f = e^{ax}\cos bx$ ，$g = e^{ax}\sin bx$ とおくと，

$$\begin{cases} f' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx \\ g' = be^{ax}\cos bx + ae^{ax}\sin bx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = af - bg \\ g' = bf + ag \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad f = \left\{\frac{1}{a^2+b^2}(af+bg)\right\}' \qquad g = \left\{\frac{1}{a^2+b^2}(-bf+ag)\right\}'$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \displaystyle\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) \\ \displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) \end{cases}$$

この結果の上の等式において，$a = 1$，$b = 2$ とおくと，③が得られます．”行列と 1 次変換”が高校数学で教えられている時代では，上の結果は

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

より，受験生は簡単に覚えることができたものです．ほんの，20，30 年前の話ですが，隔世の感を深くします．

さて，次も不等式と定積分の標準的な典型問題で，（2）では，$\log 2$ の評価が問題になります．すでに述べたようにこの種の評価は東大数学の頻出テーマです．2007 年東大・理科で出題されたもので．このレベルの問題は完答してほしいものです．

【3・9】以下の問いに答えよ．

（1）$0 < x < a$ を満たす実数 x, a に対し，次を示せ．

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt < x\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

（2）（1）を利用して，次を示せ．$0.68 < \log 2 < 0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す．

［解説］（1）$u=\dfrac{1}{t}\,(t>0)$ のグラフ（単調減少で下に凸）を考える．３点

$$\mathrm{A}\left(a-x,\frac{1}{a-x}\right),\ \ \mathrm{B}\left(a+x,\frac{1}{a+x}\right),\ \ \mathrm{T}\left(a,\frac{1}{a}\right)$$

とし，A，B，Tから x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれH，K，Lとし，Tにおける接線とAH，BKの交点をそれぞれC，Dとする（下図参照のこと）．このとき，

$$（台形\ \mathrm{CHKB}\ の面積）<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<（台形\ \mathrm{AHKB}\ の面積）\cdots（*）$$

ここで，

$$（台形\ \mathrm{AHKB}\ の面積）=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

$$（台形\ \mathrm{CHKB}\ の面積）=\mathrm{TL}\times\mathrm{HK}=\frac{1}{a}\times 2x=\frac{2x}{a}$$

$$\therefore\quad \frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\square$$

（2）
$$\log 2=\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{t}\,dt$$

であることに注意する．（1）の不等式において，

$$1=\frac{5}{4}-\frac{1}{4},\qquad \frac{3}{2}=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}-\frac{1}{4},\qquad 2=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}$$

に注意して，

$$a=\frac{5}{4},\ \frac{7}{7},\qquad x=\frac{1}{4}$$

とおくと，

$$\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)\qquad\therefore\quad \frac{2}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt<\frac{5}{12}\cdots①$$

$$\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}<\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\qquad\therefore\quad \frac{2}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{t}\,dt<\frac{7}{24}\cdots②$$

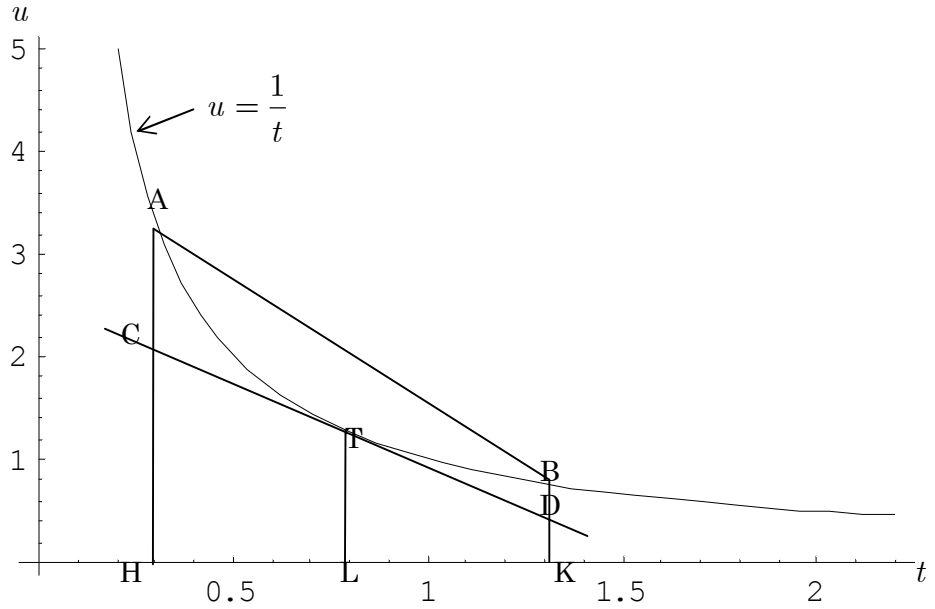
①，②を辺々加えて，

$$0.6857\cdots=\frac{24}{35}<\log 2<\frac{17}{24}=0.7083\cdots$$

$$\therefore\quad 0.68<\log 2<0.71\ \square$$

（1）は，教科書の章末問題のレベルで，東大でもこのような問題が出題されていることは頭に入れておきたいものです．世の中には，東大数学は難しい，とステレオタイプ的

に思い込んでいる受験生は多いものですが，定積分の図形的意味さえ理解できれば，（1）の不等式は，以下の図から小学生でも納得できることです．



また，（2）のポイントは，いかにうまく（1）の不等式を利用するかで，そう考えて

$$\log 2=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt$$

が思い浮び，さらにこれから，

$$1=\frac{5}{4}-\frac{1}{4},\qquad \frac{3}{2}=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}-\frac{1}{4},\qquad 2=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}$$

という関係が発想できればしめたものです．言うまでもなく，この計算自体は小学生でもわかる分数計算にすぎません．

次も，2010 年に東大・理科で出題された類題です．決して難問ではありません．果敢にチャレンジしてみてください．

【３・１０】（1）すべての自然数kに対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

（2）$m>n$であるようなすべての自然数mとnに対して，次の不等式を示せ．

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

［解説］（1） $y=\dfrac{1-x}{k+x}=\dfrac{1+k}{x+k}-1$ のグラフにおいて，$\mathrm{A}(1,0)$，$\mathrm{B}\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$ とする．

$$y'=-\frac{1+k}{(x+k)^2}$$

だから，点 A における接線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{1+k}(x-1)$$

で，この接線と y 軸との交点を $\mathrm{C}\left(0,\dfrac{1}{k+1}\right)$ とする（下図参照のこと）．このとき

$$（\triangle\mathrm{OAC}\text{ の面積}）<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<（\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積}）$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}\ \square$$

（2） $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=(k+1)\left\{\log(1+k)-\log k\right\}-1$ であるから，（1）の不等式から

$$\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\left\{\log(1+k)-\log k\right\}-1<\frac{1}{2k}$$

各辺を $k+1$ で割って

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log(1+k)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

$k=n.,n+1,\cdots,m-1$ として，各項を加えると

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，

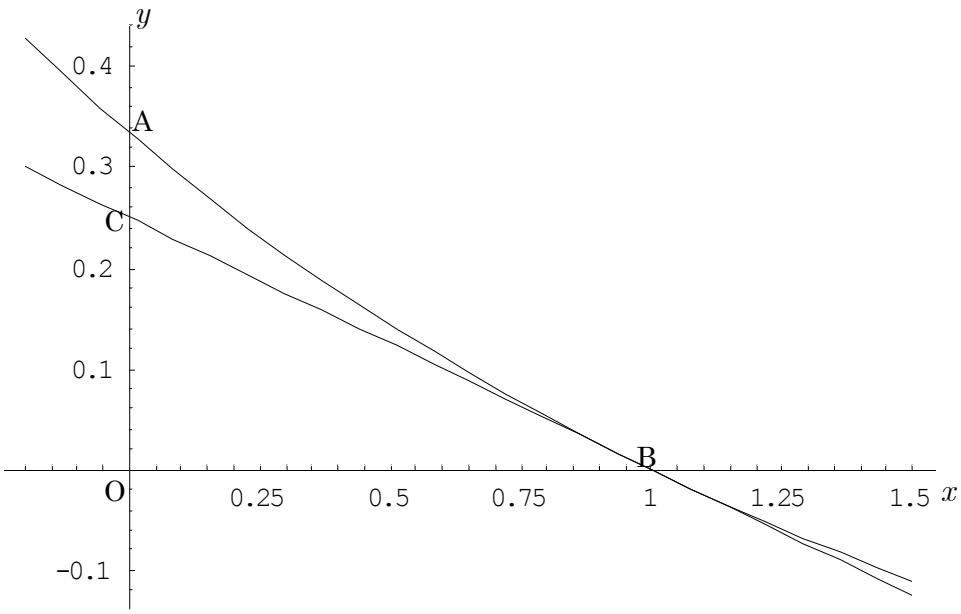
$$\begin{aligned}（\text{右端の式}）&=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}（\text{左端の式}）&=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2}>\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}\ \square$$

$k=3$ のとき，$y=\dfrac{1-x}{k+x}$ と $y=-\dfrac{1}{1+k}(x-1)$ のグラフ，および 3 点 A，B，C は下図のようになる．



（1）の右側の不等式は，簡単ですが，左側の不等式の図形的意味をさぐるのは難しいかもしれません．しかし，ある特別な点における“接線を利用する”と考えれば，その特別な点が“B”であることは見えてくるはずです．

（2）のポイントは，言うまでもなく，“差分”であり，

$$\sum_{k=n}^{m-1}\{f(k)-f(k+1)\}=f(n)-f(m)$$

は数列の和を求める際の，“ABC”です．

いずれにせよ，本問も難問ではなく，受験会場でなんとか完答してほしい問題です．

今回のブログの“掉尾（テウビ）”を飾るのは，2004 年の東工大の問題です．いかにも東工大らしい出題で，計算力が鍵になります．

【３・１１】次の問いに答えよ．

（1） $f(x)$，$g(x)$ を連続な偶関数，m を正の整数とするとき，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$$

を証明せよ．

（2）正の整数 m,n が $m\pi \leq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき，

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leq \int^{1}\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)}dx \leq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}dx$$

を証明せよ．

（３）極限値　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$　を求めよ．

[解説]（１）左辺$=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$ であるから，$u=x-(k-1)\pi$ とおくと

$$\sin x=\sin\{u+(k-1)\pi\}=(-1)^{k-1}\sin u$$
$$\cos x=\cos\{u+(k-1)\pi\}=(-1)^{k-1}\cos u$$

であり，$f(x),g(x)$ は偶関数であるから $f(\sin x)=f(\sin u)$，$g(\cos x)=g(\cos u)$ が成り立つ．よって，

$$左辺=\sum_{k=1}^{m}\int_0^{\pi} f(\sin u)g(\cos u)du=m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx=右辺\square$$

（２）$t=nx$ とおくと，

$$\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx=\int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{dt}{n}\quad\cdots①$$

ここで，$f(x)=|x|$，$g(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ とおくと，$f(x),g(x)$ は連続な偶関数であるから．

$m\pi\le n<(m+1)\pi$　（仮定）と，（１）の結果より，

$$①の右辺=\frac{1}{n}\int_0^n f(\sin t)g(\cos t)dt\ge\frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi} f(\sin t)g(\sin t)dt$$
$$=\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt$$
$$=\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$
$$①の右辺=\frac{1}{n}\int_0^n f(\sin t)g(\cos t)dt\le\frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt$$
$$=\frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt$$
$$=\frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

よって，題意の等式は示された．$\square$

（３）$X=\cos x$ とおき，さらに $X=\tan\theta$ とおくと

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx=2\int_0^1\frac{1}{(1+X^2)^2}dX$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

したがって，（2）より，

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \leq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

よって，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi} \square$$

誘導にしたがって考えていけば，この問題自体は難しくありませが，（3）の極限値をいきなり求めよ，という問題が出されたら，多くの受験生は，きっとまごつきますね．しかし，後期試験があった時代にはそんな問題も出題されていました．実際，

1999 年後期：極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{1+x} dx$ $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ．

2008 年後期：極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^2 \left|\sin n\pi x\right| dx$ $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ．

といった具合です．これらは，パズルとして考えてみても面白いと思いますので，腕に自身のあるかたは挑戦してみて下さい．答は，

はじめが，$\dfrac{1}{2}\log\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$，２番目は，$\dfrac{2}{3\pi}$

です．次回は，少し趣を変えて“整数問題”を紹介してみたい思います．