

東大数学パトロール (09 回)

—図形と方程式 (II)—

前回に引き続き、今回も“図形と方程式”の問題を取り上げます。テーマは

円と直線・曲線, 軌跡と方程式, 不等式と領域

で、テーマ自体は極めて平凡です。しかし、今回扱う問題は、前回取り上げた問題よりもややレベルアップ, 少し難しく感じられるかもしれません。また, “直線や曲線の通過領域”の問題も取り上げますが, これは多くの受験生が苦手意識をもっている分野です。熟読玩味して得意分野にして変えてほしいものです。

[1] 円と直線・曲線

最初は, 1991 年東大・前期・理科で出題されたもので, 実は“整数”が絡んでいる問題です。現役生にはかなりの難問と言ってもいいでしょう。

【9・1】

xy 平面上, x 座標, y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点と呼ぶ。各格子点を中心として半径 r の円が描かれており, 傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

【解説】

傾き $\frac{2}{5}$ の直線の方程式を $2x - 5y = k$ (k は実数) とおく。この直線が, 題意の円のどれかと共有点をもつ条件は

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{|2m - 5n - k|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} \leq r \quad \dots (*)$$

である。すなわち, 任意の実数 k に対して, 不等式 $(*)$ を満たす整数 m, n が存在することである。

ここで,

$$(*) \Leftrightarrow |2m - 5n - k| \leq \sqrt{29}r$$

であり, $\gcd(2, 5) = 1$ (2 と 5 は互いに素) であるから

$$\{2m - 5n \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

となる。したがって, 上の条件は,

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{Z} : |N - k| \leq \sqrt{29}r \quad \dots (**)$$

となり, $(**)$ が成り立つための r の条件を考えればよいが, 任意の実数 k に対して,

$$|N - k| \leq \varepsilon \Leftrightarrow k - \varepsilon \leq N \leq k + \varepsilon$$

を満たす整数 N が必ず存在するための正数 ε の条件は $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ である。よって、

$$\sqrt{29}r \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow r \geq \frac{1}{2\sqrt{29}}$$

すなわち、 $(r \text{ の最小値}) = \frac{1}{2\sqrt{29}}$ ■

上の [解説] の第 1 のポイントは、2 と 5 が互いに素だから、 m, n が整数全体を動くとき、

$$2m - 5n \text{ は、すべての整数値をとる}$$

ということで、これは常識になっていなければなりません。ここでは、証明は割愛しますが、一般に a, b が互いに素な整数のとき、

$$ax_0 + by_0 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数 x_0, y_0 が存在し、したがって、任意の整数 N に対して

$$ax + by = N$$

を満たす整数 x, y が存在することも容易に分かります。実際、 $\textcircled{1}$ を N 倍して

$$a(Nx_0) + b(Ny_0) = N$$

を得るからです。

第 2 のポイントは、任意の実数 k に対して、

$$|N - k| \leq \varepsilon$$

を満たす正数 ε が存在する条件です。言うまでもなく、その条件は $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ です。実際、たと

えば、 $k = \frac{1}{2}$ のとき、 $\varepsilon = \frac{2}{5}$ とすると、

$$\left| N - \frac{1}{2} \right| < \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{10} < N < \frac{9}{10}$$

となり、これを満たす整数 N が存在しません。

“円と直線”の問題とは言え、整数と論理の絡む問題で、トップ・バッターとしては難問だったかもしれません。

次は 1991 年東大・後期。理科の問題です。“後期”の問題ではありますが、ある意味では平凡な問題です。

【9・2】

平面上に 3 つの円 C_1, C_2, C_3 があって、 C_1 と C_2 は相異なる 2 点 A, B で交わり、 C_3 は C_1

および C_2 と互いに直交してしている。ただし、2つの円が互いに直交しているとは、2つの円に共通点があって、各共通点におけるそれぞれの円に接する接線がその共通点で直交していることをいう。

(1) 円 C_3 の中心は、2点A, Bを通る直線上にあることを示せ。

(2) 2点A, Bの一方は円 C_3 の内側に、他方は円 C_3 の外側にあることを示せ。

【解説】

(1) 座標平面上で、 C_1, C_2, C_3 の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とし、中心をそれぞれ

$$O_1(0,0), O_2(a,0) (a \neq 0), O_3(b,c) (c > 0)$$

とすると、

$$C_1 : x^2 + y^2 = r_1^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$C_2 : (x - a)^2 + y^2 = r_2^2 \cdots \textcircled{2}$$

①-②から、直線ABの方程式は

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + a^2}{2a}$$

また、 C_1 と C_3 の交点の1つをPとすると、

$O_1P \perp O_3P$ だから

$$O_1O_3^2 = b^2 + c^2 = r_1^2 + r_3^2 \cdots \textcircled{3}$$

同様に、

$$O_2O_3^2 = (b - a)^2 + c^2 = r_2^2 + r_3^2 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{から、 } b = \frac{r_1^2 - r_2^2 + a^2}{2a}$$

よって、円 C_3 の中心 O_3 は直線AB上にある。 ■

(2) $c > 0$ だから、③より、 $O_3(b, \sqrt{r_1^2 + r_3^2 - b^2})$

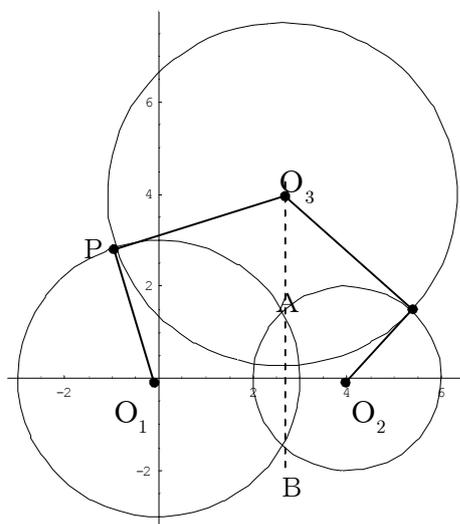
また、Aを $y > 0$ の範囲にある交点とすると、

$$A(b, \sqrt{r_1^2 - b^2}), B(b, -\sqrt{r_1^2 - b^2})$$

$r_1^2 - b^2 > 0$ だから

$$O_3A = \sqrt{r_1^2 + r_3^2 - b^2} - \sqrt{r_1^2 - b^2} = \frac{r_3^2}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - b^2} + \sqrt{r_1^2 - b^2}} < \frac{r_3^2}{\sqrt{2}r} = r_3$$

$$O_3B = \sqrt{r_1^2 + r_3^2 - b^2} + \sqrt{r_1^2 - b^2} > \sqrt{2}r = r_3$$



よって、A、Bの一方は円 C_3 の内側に、他方は円 C_3 の外側にある。 ■

上の問題には“ヒネリ”はなく、特に〔解説〕の補足説明は必要ないかと思います。オーソドックスに考えていけばよいだけです。

次は1999年東大・後期・理科の問題です。同じ後期の91年と99年ではこれだけの差があります。難問でしょう。

【9・3】

座標平面上の原点を $O(0,0)$ とする。また x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。

(1) t を正の実数とする。点 $P(-1,0)$ を通り、傾きが t の直線と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ との P 以外の交点を $Q(t)$ とする。 $Q(t)$ の座標を求めよ。次に、 $0 < s < t$ を満たす2つの実数 s, t に対し、線分 $Q(s)Q(t)$ の長さを求めよ。

(2) $\angle Q(s)PO = \alpha$, $\angle Q(t)PO = \beta$ とし、 $u = \tan \frac{\alpha}{2}$, $v = \tan \frac{\beta}{2}$ とおく。もし u, v

がともに有理数ならば、また線分 $Q(s)Q(t)$ の長さもまた有理数となることを示せ。

(3) 任意に与えられた3以上の整数 n に対し、次の条件(C1), (C2), (C3)をすべてみたす n 個の異なる点 A_1, A_2, \dots, A_n が、座標平面上に存在することを証明せよ。

(C1) A_1, A_2, \dots, A_n はすべて格子点である。

(C2) A_1, A_2, \dots, A_n のどの異なる3点も1直線上にない。

(C3) A_1, A_2, \dots, A_n のどの異なる2点 A_i, A_j に対しても、線分 A_iA_j の長さは整数である。

【解説】

(1) $x^2 + y^2 = 1 \dots \textcircled{1}$

$y = t(x + 1) \dots \textcircled{2}$

①, ②から y を消去して

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$$

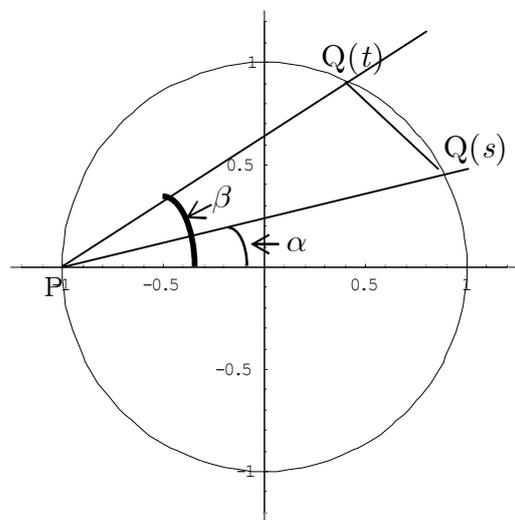
$$\Leftrightarrow (x + 1)\{(x - 1) + t^2(x + 1)\} = 0$$

$x \neq -1$ としてよいから、

$$(x - 1) + t^2(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

②より、 $y = t\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1 + t^2}$



$$\therefore Q(t) \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \blacksquare$$

上と同様にして, $Q(s) \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2} \right)$ であるから,

$$\begin{aligned} \overline{Q(s)Q(t)} &= \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1-s^2}{1+s^2} \right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2s}{1+s^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left\{ \frac{-2(t^2-s^2)}{(1+t^2)(1+s^2)} \right\}^2 + \left\{ \frac{2(t-s)(1-ts)}{(1+t^2)(1+s^2)} \right\}^2} \\ &= \sqrt{\frac{4(t-s)^2 \{ (t+s)^2 + (1-ts)^2 \}}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}} = \sqrt{\frac{4(t-s)^2(1+t^2)(1+s^2)}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}} \\ &= \frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+t^2)(1+s^2)}} \quad (\because < s < t) \blacksquare \end{aligned}$$

$$(2) \quad s = \tan \alpha = \tan \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2u}{1-u^2} \quad (0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \text{ より } 0 < u < 1)$$

$$\therefore \sqrt{1+s^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2u}{1-u^2} \right)^2} = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

$$\text{同様に, } t = \frac{2v}{1-v^2}, \quad \sqrt{1+t^2} = \frac{1+v^2}{1-v^2}$$

したがって, (1) の結果から

$$\overline{Q(s)Q(t)} = \frac{2 \left(\frac{2v}{1-v^2} - \frac{2u}{1-u^2} \right)}{\frac{1+v^2}{1-v^2} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2}} = \frac{4(v-u)(1+uv)}{(1+v^2)(1+u^2)}$$

よって, u, v がともに有理数ならば, 線分 $Q(s)Q(t)$ の長さもまた有理数である. \blacksquare

(3) 3以上の任意の整数 n に対して, 3つの条件 (C1) ~ (C3) を満たす n 個の異なる点 A_1, A_2, \dots, A_n の作り方を示しておけばよい.

まず, $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1$ を満たす有理数列を作る. すなわち,

$$u_i = \frac{p_i}{q_i} \quad (p_i, q_i \text{ は正の整数, } 0 < p_i < q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

とする, また

$$s_i = \frac{2u_i}{1-u_i^2} \left(= \frac{2p_i q_i}{q_i^2 - p_i^2} \right), \quad R = (q_1^2 + p_1^2)^2 (q_2^2 + p_2^2)^2 \cdots (q_n^2 + p_n^2)^2$$

とし,

$$\text{円} : x^2 + y^2 = R^2 \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{直線} : y = s_i(x + R) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \cdots \textcircled{4}$$

との点 $(-R, 0)$ 以外の交点を A_i と定める. このとき, (1) と同様にして A_i の座標を求めると

$$A_i \left(\frac{1 - s_i^2}{1 + s_i^2} R, \frac{2s_i}{1 + s_i^2} R \right) = \left(\frac{(q_i^2 - p_i^2)^2 - 4q_i^2 p_i^2}{(q_i^2 + p_i^2)^2} R, \frac{2p_i q_i (q_i^2 - p_i^2)}{(q_i^2 + p_i^2)^2} R \right)$$

であるから, A_i は格子点になり, 条件 (C1) を満たす.

次に, 線分 $A_i A_j$ の距離を (2) と同様にして求めると,

$$\overline{A_i A_j} = \frac{4(u_j - u_i)(1 + u_j u_i)}{(1 + u_j^2)(1 + u_i^2)} R = \frac{4(p_j q_i - p_i q_j)(q_j^2 + p_j^2)}{(q_j^2 + p_j^2)(q_i^2 + p_i^2)} R$$

となるから, $\overline{A_i A_j}$ は整数になり, 条件 (C3) を満たす.

さらに, 上のように定めた A_1, A_2, \dots, A_n はどの点も異なり, 円周上の相異なる 3 点は同一直線上にないので, 条件 (C2) も満たす.

以上により, 題意は証明された. ■

本問の (1) の $Q(t)$ の座標を求める問題は, “有名問題” で, これまでもいくつかの大学で出題されています. 要するに, $t = \tan \theta$ とおくと,

$$\cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

というよく知られた結果にほかなりません.

また, この結果から $t = \tan \theta$ が有理数ならば, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ が有理数であり, 逆に, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ が有理数であれば,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

より, $\tan \theta$ が有理数であることが分かります. すなわち,

$$[\cos 2\theta, \sin 2\theta \text{ がともに有理数}] \Leftrightarrow [\tan \theta \text{ が有理数}]$$

ということが証明されたこととなります.

(3) は, “さすが後期の問題” と思わせるものですが, 実は, [解説] で述べたような有理数列と R を決めれば, あとは計算だけ. とは言え, 並みの東大受験生にとっても難しいでしょう. [解説] を味読して下さい.

以下に, 上の問題の類題として, 1989 年お茶の水女子大・理の問題を紹介しておきます.

【9・4】

m, n は自然数、 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\cos \theta, \sin \theta$ がともに有理数ならば、 $\cos m\theta, \sin m\theta$ はともに有理数となることを示せ。

(2) $\cos \theta = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \sin \theta = \frac{2n}{n^2 + 1}$ ならば、 $\theta < \frac{\pi}{n}$ となることを示せ。

(3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の任意の点 $P(x, y)$ に対して、この円上の点 $Q(u, v)$ で中心角 $\angle POQ$ が $\frac{\pi}{n}$ 以下であって、 u, v がともに有理数となるものが存在することを示せ。

【解説】

(1) 数学的帰納法で証明する。 $m = 1$ のときは、仮定より明らかに成り立つので、1 以上のある m で、 $\cos m\theta, \sin m\theta$ が有理数であるとする。このとき、

$$\cos\{(m+1)\theta\} = \cos m\theta \cos \theta - \sin m\theta \sin \theta$$

$$\sin\{(m+1)\theta\} = \sin m\theta \cos \theta + \cos m\theta \sin \theta$$

だから、 $\cos\{(m+1)\theta\}, \sin\{(m+1)\theta\}$ も有理数となる。よって、帰納法により、すべての自然数 m に対して、 $\cos m\theta, \sin m\theta$ は有理数となる。 ■

(2) $\cos \theta = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \geq 0, \sin \theta = \frac{2n}{n^2 + 1} > 0$ だから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。したがって、

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}}{1 + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}} = \frac{1}{n^2} \quad \therefore \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \frac{\theta}{2} < \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{n} \quad \therefore \theta < \frac{2}{n} < \frac{\pi}{n} \quad \therefore \theta < \frac{\pi}{n} \quad \blacksquare$$

(3) $\angle POx = \alpha$ とおき、 θ を (2) で定まる角とすると

$$(m-1)\theta \leq \alpha < m\theta \cdots \textcircled{1}$$

を満たす自然数 m が存在する。このとき、

$$u = \cos m\theta, \quad v = \sin m\theta$$

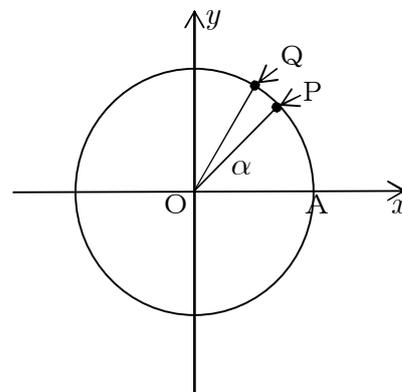
と定めると、(1), (2) より、

$$u, v \in \mathbb{Q}$$

であり、右図のように $A(1, 0)$ とすると、

$$\begin{aligned} \angle POQ &= \angle QOA - \angle POA \\ &= m\theta - \alpha \\ &\leq m\theta - (m-1)\theta \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \theta < \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

よって、題意は示された。 ■



(2) は、右図のような

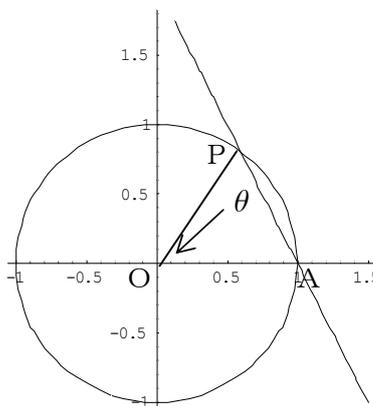
$$\text{円} : x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{直線} : y = -n(x - 1)$$

の点A(1,0)以外の交点を考えると、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{n}$$

はほとんど自明です。実際、円と直線の方程式を連立して、 $x \neq 1$ に注意すると、



$$x^2 + \{-n(x-1)\}^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 1) + n^2(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x + 1 + n^2(x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\text{これより, } y = -n \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - 1 \right) = \frac{2n}{n^2 + 1}$$

したがって、図のように点Pを定め、 $\angle POA = \theta$ とすると、Pの座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ で

$$\cos \theta = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad \sin \theta = \frac{2n}{n^2 + 1}$$

さらに、 $\angle OAP = \frac{\pi - \theta}{2}$ だから、

$$\tan \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = n \quad \therefore \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = n \quad \therefore \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{n}$$

となります。そして、 $x < \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ という“数Ⅲ”の有名不等式から、

$$\frac{\theta}{2} < \tan \frac{\theta}{2} \left(= \frac{1}{n} \right)$$

が導かれるというわけです。これが、問(2)の背景です。

(3) は、**有理数の稠密性 (density)** に関する問題で、これはいわゆる“位相空間論”にまで発展します。さすが“理学部・数学科”の問題というべきです。(2)の結果を利用する方がいいのですが、“**存在**”を主張するこの問いは、並みの受験生には難しいでしょう。

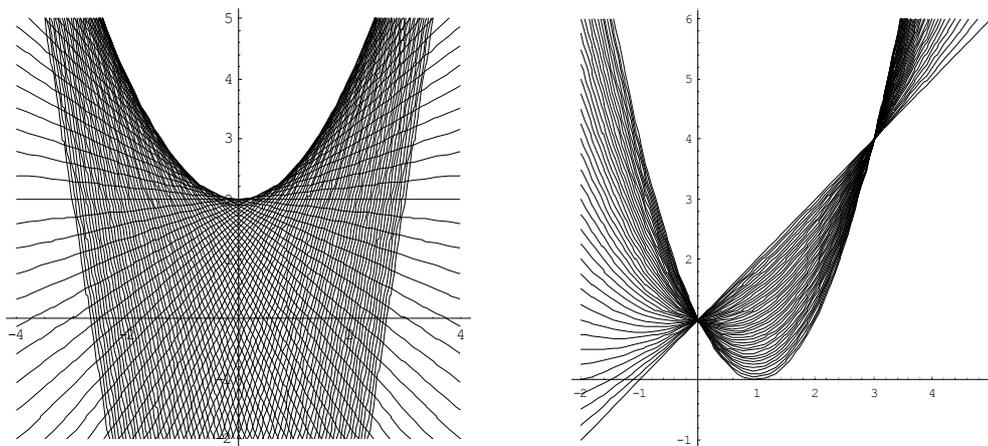
[2] 軌跡と方程式

ここでは、パラメータの入った図形の方程式について考察してみます。たとえば、

$$\text{直線： } y = 2ax + 2 - a^2 \quad (a \text{ がパラメータ}) \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{放物線： } y = tx^2 + (1 - 3t)x + 1 \quad (t \text{ がパラメータ}) \cdots \textcircled{2}$$

のような方程式で、 a が実数全体を動くときの直線の通過領域は下左図、 t が $0 < t \leq 1$ の範囲を動くときの放物線の通過領域は下右図になります。東大を目指す受験生であれば、この程度の問題は“朝めし前”と感じて欲しいものです。



さて、次の問題は、1968年東大・二次の文理共通問題で、きわめて基本的なものです、それゆえ案外難しいのではと思います。実は、私自身、この問題を高校1年の夏休みに考えましたが、大いにまごついた記憶があります。

【9・5】

α, β は与えられた実数とする。 x の2次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の係数 a, b, c が $a + b + c = 0$ なる関係式を満たしながら動くとき、座標 $(f(\alpha), f(\beta))$ をもつ点の全体は、平面上のどのような集合になるか。

【解説】

$$a + b + c = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$X = f(\alpha)$, $Y = f(\beta)$ とおくと、①とから

$$X = a\alpha^2 + b\alpha + c = a\alpha^2 + b\alpha - (a + b) = a(\alpha^2 - 1) + b(\alpha - 1) \cdots \textcircled{2}$$

$$Y = a\beta^2 + b\beta + c = a\beta^2 + b\beta - (a + b) = a(\beta^2 - 1) + b(\beta - 1) \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から b を消去すると、

$$(\beta - 1)X - (\alpha - 1)Y = a(\beta - 1)(\alpha^2 - 1) - a(\alpha - 1)(\beta^2 - 1)$$

$$\therefore (\beta - 1)X - (\alpha - 1)Y = a(\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha - \beta) \cdots \textcircled{4}$$

(ただし、 a は0以外の実数全体を動く.)

(i) $\alpha = \beta$ の場合 ; ④より、 $(\alpha - 1)(X - Y) = 0$

イ) $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ のとき、直線 $X - Y = 0$ ■

ロ) $\alpha = 1$ かつ $\beta = 1$ のとき、原点 $(0, 0)$ ■

(ii) $\alpha \neq \beta$ の場合 ;

イ) $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ のとき、

④の右辺は0以外の実数全体を動くので、直線 $(\beta - 1)X - (\alpha - 1)Y = 0 \cdots \textcircled{5}$ に平行な直線の集合。ただし、直線⑤自身は除く。 ■

ロ) $\alpha \neq 1$ かつ $\beta = 1$ のとき、

④より、 $(\alpha - 1)Y = 0 \quad \therefore$ 直線 $Y = 0$ ■

ハ) $\alpha = 1$ かつ $\beta \neq 1$ のとき、

④より、 $(\beta - 1)X = 0 \quad \therefore$ 直線 $X = 0$ ■

[解説] を読んで頂ければお分かりのように、ごく平凡な問題です。難しい(?) のは場合分けて、キチンとした論理的思考のもとで“当たり前”のことが“当たり前”にできる”ことが如何に大切であるかを実感して下さい。ほかに言うべきことはありません。

次は、今年(2021年)東大・前期の文理共通問題です。この問題も“当たり前”のことを当たり前”に考えていけばよい“良問”です。決して“トリッキー”な問題ではありません。挑戦してみてください。

【9・6】

a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ は放物線 $y = -x^2$ と2つの共有点を持ち、一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし、他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

[解説]

(1) $y = x^2 + ax + b \cdots \textcircled{1} \quad y = -x^2 \cdots \textcircled{2}$

①, ②を連立して、 $x^2 + ax + b = -x^2 \quad b = -a - 2$

$\therefore 2x^2 + ax + b = 0$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおくと、 $f(x) = 0$ が、

$-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$

とにそれぞれ1つずつ解を持つ条件より

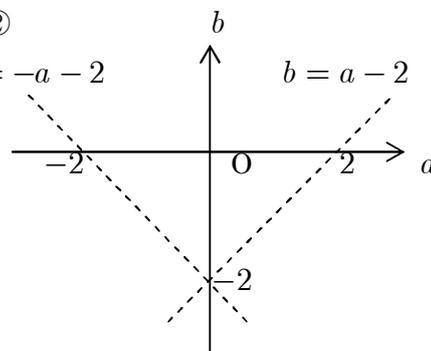
$f(-1) = 2 - a + b > 0, \quad f(0) = b < 0,$

$f(1) = 2 + a + b > 0$

すなわち、

$b > a - 2$ かつ $b < 0$ かつ $b > -a - 2$

よって、点 (a, b) のとりうる範囲は右上図の直角三角形の内部。



ただし、境界はすべて含ない。■

(2) (1) で求めた領域を D とする。放物線 C が点 (X, Y) を通る条件は、

$$Y = X^2 + aX + b \text{ を満たす } (a, b) \text{ が } D \text{ に存在する}$$

ことである。すなわち、直線 $b = -Xa + Y - X^2$ が領域 D を通過することである。

いま、 $g(a) = -Xa + Y - X^2$ とおく。

(i) $-X \geq 0$ の場合；

イ) $0 \leq -X \leq 1$ すなわち $-1 \leq X \leq 0$ のとき；

$$g(0) > -2 \text{ かつ } g(-2) < 0$$

$$\therefore X^2 - 2 < Y < X^2 - 2X$$

ロ) $-X > 1$ すなわち $X < -1$ のとき；

$$g(-2) < 0 \text{ かつ } g(2) > 0$$

$$\therefore X^2 + 2X < Y < X^2 - 2X$$

(ii) $-X \leq 0$ の場合；

イ) $-1 \leq -X \leq 0$ すなわち $0 \leq X \leq 1$ のとき；

$$g(0) > -2 \text{ かつ } g(2) < 0$$

$$\therefore X^2 - 2 < Y < X^2 + 2X$$

ロ) $-X < -1$ すなわち $X > 1$ のとき；

$$g(-2) > 0 \text{ かつ } g(2) < 0$$

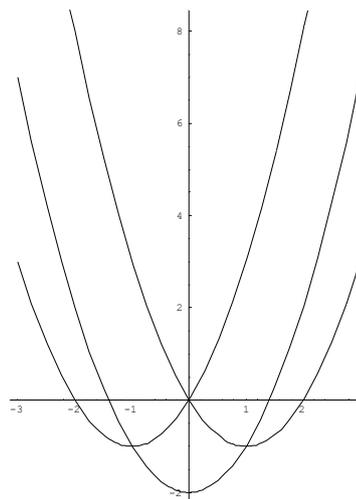
$$\therefore X^2 - 2X < Y < X^2 + 2X$$

以上から、放物線 C の通過領域は、

$$x > -1 \wedge x^2 + 2x < y < x^2 - 2x, \quad -1 \leq x \leq 0 \wedge x^2 - 2 < y < x^2 - 2x$$

$$0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 - 2 < y < x^2 + 2x, \quad x > 1 \wedge x^2 - 2x < y < x^2 + 2x$$

で、右図。境界はすべて含まない■



(1) は、月並みな標準問題です。(2) のポイントは

$$Y = aX^2 + aX + b \text{ を満たす } (a, b) \text{ が } D \text{ に存在する}$$

X と Y の条件を探ることで、(1) で求めた領域と直線

$$b = -Xa + Y - X^2$$

とが共有点を持つ条件を求めればいいだけです。その際、直線の傾き“ $-X$ ”に着目して場合分けをしていくのも、きわめて自然な発想でしょう。“当たり前のことを当たり前”に考えていくことを忘れてはいけません。

上の【解説】では、放物線 C の通過領域を不等式で示しておきましたが、これを参考にして通過領域の境界だけを示した上図に、斜線を施してみてください。これは、各自の課題ということにしておきましょう。

次は 1997 年東大・文科の問題です。直線の通過領域を考える典型問題ですが、この問題では“**3次方程式の解の存在条件**”がポイントになります。

【9・7】

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して, xy 平面上の点 A, B を

$$A\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}, -2\right), \quad B\left(\frac{2}{3}t, -2t\right)$$

と定める. t が $0 \leq t \leq 1$ を動くとき, 直線 AB の通りうる範囲を図示せよ.

【解説】

直線 AB の傾きは

$$\frac{-2t - (-2)}{\frac{2}{3}t - \frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}} = \frac{-3(t-1)}{t - \frac{t^2+t+1}{t+1}} = 3(t^2-1)$$

であるから, 直線 AB の方程式は,

$$y = 3(t^2-1)\left(x - \frac{2t}{3}\right) - 2t$$

$$\therefore y = 3(t^2-1)x - 2t^3 \Leftrightarrow 2t^3 - 3xt^2 + 3x + y = 0$$

$f(t) = 2t^3 - 3xt^2 + 3x + y$ とおき, $f(t) = 0$ が $0 \leq t \leq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件を求めておけばよい.

$$f'(t) = 6t(t-x)$$

に注意すると

(i) $x \leq 0$ のとき,

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y \leq -3x \\ y \geq -2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

(ii) $0 < x < 1$ のとき,

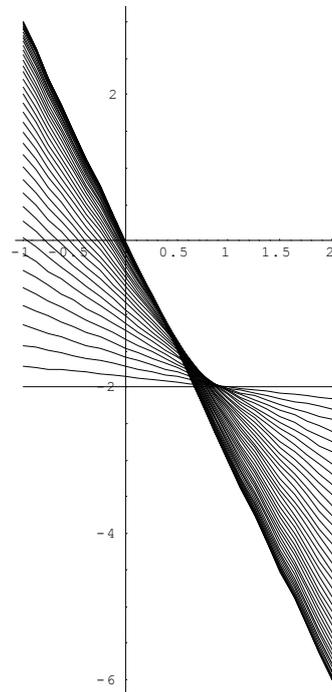
$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq x^3 - 3x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \geq -2 \\ y \leq x^3 - 3x \end{cases} \quad \blacksquare$$

(iii) $x \geq 1$ のとき,

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y \geq -3x \\ y \leq -2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

よって, 直線 AB の通りうる範囲は右図のようになる. \blacksquare



本問のポイントは, $u = f(t) = 2t^3 - 3xt^2 + 3x + y$ のグラフを利用することで,

$0 \leq x \leq 1$ においては, $u = f(t)$ のグラフは

$x \leq 0$ のとき, 単調増加

$0 < x < 1$ のとき, $t = 0$ で極大, $t = x$ で極小

$x \geq 1$ のとき, 単調減少

になります. ここに着目すれば, 3次方程式 $f(t) = 0$ が, $0 \leq t \leq 1$ に少なくとも1つの実数解を持つ条件は容易に得られます.

なお, 直線 AB の方程式 $y = 3(t^2 - 1)x - 2t^3$ は,

$$y = (3t^2 - 3)(x - t) + t^3 - 3t$$

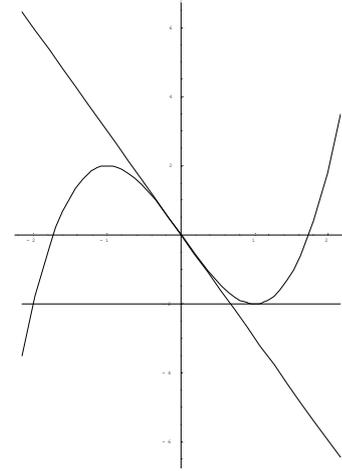
と変形できるから, これは右図のような3次曲線

$$y = x^3 - 3x$$

の $x = t$ ($0 \leq t \leq 1$) における接線であることが分かります. 右図には,

$$t = 0 \text{ における接線 ; } y = -3x$$

$$t = 1 \text{ における接線 ; } y = -2$$



が描かれていますが, 実はこれより直線 AB に通過領域は予想できます.

一般に, 1つのパラメータ t に対して, t が変化すると, 曲線 $f(x, y, t) = 0$ は“曲線群”を作りますが, $f(x, y, t) = 0$ に対して,

$$f(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \quad (\text{偏微分})$$

の交点は1つの曲線 C を描きます. この曲線 C と与えられた曲線群の各曲線とが接するとき, C を与えられた曲線群の“**包絡線 (envelope)**”と言います. 本問の場合であれば, $t \neq 0$ のとき,

$$3(t^2 - 1)x - y - 2t^3 = 0, \quad 6xt - 6t^2 = 0$$

の交点は $(t, t^3 - 3t)$ であり, 交点は曲線 $y = x^3 - 3x$ を描きます. これが本問の包絡線であることは, 図からも納得できるでしょう.

さて本節の最後に, 口直しとして 2011 年東大・文理共通の平凡な問題を取り上げてみましょう.

【9・8】

座標平面上の1点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる. 放物線 $y = x^2$ 上の2点 $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を3点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, $\triangle PQR$ の重心 G

(X, Y) の軌跡を求めよ.

【解説】

$G(X, Y)$ は, $\triangle PQR$ の重心だから

$$\begin{cases} X = \frac{1}{3} \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2} \right) \\ Y = \frac{1}{3} \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4} \right) \end{cases}$$

これより,

$$\alpha + \beta = 3X - \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \frac{1}{4} \dots \textcircled{2}$$

また, $QR \neq 0$ より $\alpha \neq \beta$ で

$PQ = PR$ から,

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right)^2 &= \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha &= \beta^4 + \frac{\beta^2}{2} - \beta \\ \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \left\{ (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - 1 \right\} &= 0 \\ \therefore (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

①, ②を代入すると,

$$\left(3X - \frac{1}{2} \right) \left(3Y - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(3X - \frac{1}{2} \right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(3X - \frac{1}{2} \right) \left(3Y + \frac{1}{4} \right) = 1$$

$$\therefore \left(X - \frac{1}{6} \right) \left(Y + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{9} \dots \textcircled{3}$$

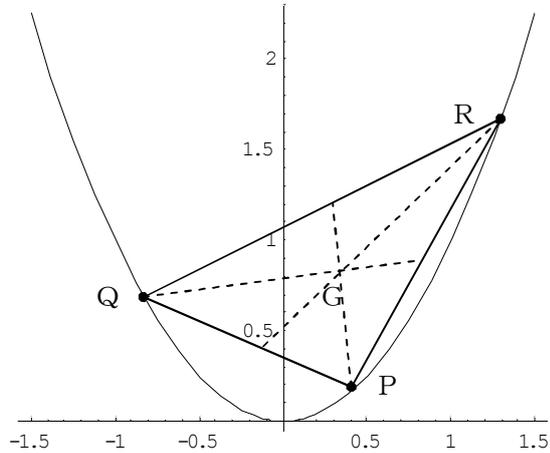
また, ①, ②より

$$\alpha\beta = \frac{1}{2} \{ (\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \} = \frac{1}{2} \left\{ \left(3X - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(3Y - \frac{1}{4} \right) \right\} \dots \textcircled{4}$$

で, α, β は相異なる実数であるから,

$$(\alpha - \beta)^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta > 0$$

$$\therefore \left\{ \left(3X - \frac{1}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left(3X - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(3Y - \frac{1}{4} \right) \right\} \right\} > 0$$



$$\therefore Y > \frac{3}{2} \left(X - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{12} \dots \textcircled{5}$$

ここで、⑤の不等号を等号に変えた放物線の方程式と③を連立して

$$\left(X - \frac{1}{6} \right) \left\{ \frac{3}{2} \left(X - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \right\} = \frac{1}{9}$$

$Z = X - \frac{1}{6}$ とおくと、

$$Z \left(\frac{3}{2} Z^2 + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 27Z^3 + 3Z - 2 = 0 \Leftrightarrow (3Z - 1)(9Z^2 + 3Z + 2) = 0$$

$$\therefore (3Z - 1) \left\{ 9 \left(Z + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{7}{4} \right\} = 0$$

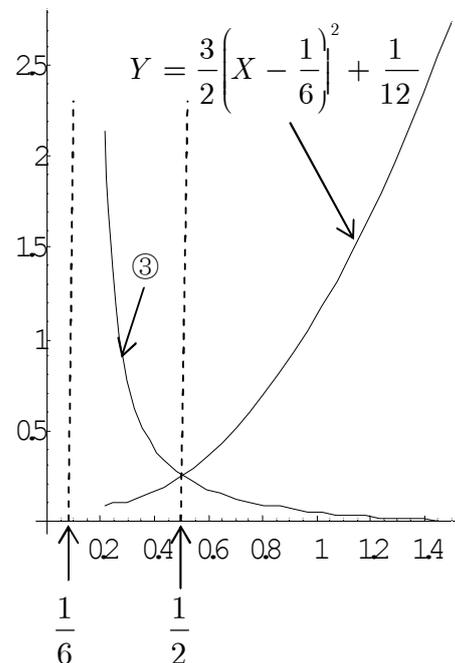
$$\therefore Z = \frac{1}{3} \quad \therefore X = \frac{1}{2}$$

さらに、⑤より $Y > \frac{1}{12}$ だから、③より

$$X > \frac{1}{6}$$

以上より、点Gの軌跡は③より

$$Y = \frac{1}{9 \left(X - \frac{1}{9} \right)} - \frac{1}{12} \quad \left(\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2} \right) \blacksquare$$



計算はやや煩雑ですが、方針の立て難い問題ではありません。上の〔解説〕で味わって欲しいのは、 α, β ($\alpha \neq \beta$) が実数である条件が、

$$(\alpha - \beta)^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta > 0$$

となることで、当たり前のことですが、0でない数 x が、実数である条件は

$$x^2 > 0$$

であることは肝に銘じておきたいことです。“実数条件” と言えばすぐに“判別式” と考える受験生は多く見受けられます。誤解を恐れずに言えば、“判別式” の由来も忘れたこのような単純な思考回路に、私は嫌悪感をもっています。授業中に“判別式” は忘れよう、というのが私の口癖です (笑)。

[3] 不等式と領域

今回のパトロールもいよいよ最終節です。ここでは、ベクトルと複素数の登場する、少し特殊な“不等式と領域”の問題を考えてみましょう。

最初は、昨年（2020年）の東大・理科の、ちょっと“楽しめる”問題です。

[9・9]

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき、それらの3点を3頂点とする三角形の面積を $\triangle PQR$ で表す。また、 P, Q, R が同一直線上にあるときは、 $\triangle PQR=0$ とする。

A, B, C を平面上の3点とし、 $\triangle ABC=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leq 3$$

を満たしながら動くとき、 X の動きうる範囲の面積を求めよ。

[解説]

$S = \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX$ とおく。

領域 $D_1 \sim D_6$ を右図のように定めておく。

点 X が $\triangle ABC$ の内部または周にあるときは、 $S = 1$ だから不適。

(i) X が D_1 にあるとき；

直線 AX と辺 BC の交点を Y とし、

$$AY : XY = 1 : k$$

とすると、

$$S = 2 \times \triangle BCX - 1$$

$$= 2k \times \triangle ABC - 1 = 2k - 1$$

$$\therefore 2 \leq S \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2k - 1 \leq 3$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq k \leq 2$$

(ii) X が D_2 にあるとき；

直線 CX と辺 AB の交点を Z とし、

$$CZ : XC = 1 : k$$

とすると、

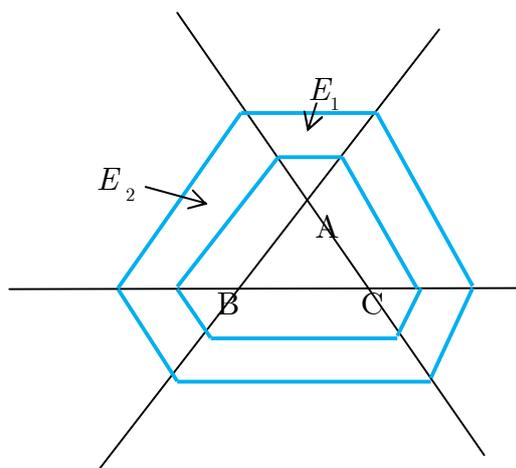
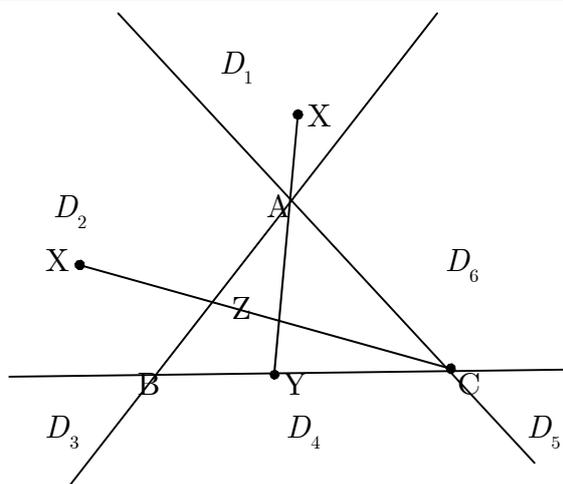
$$S = 2 \times \triangle ABX + 1$$

$$= 2(k - 1) + 1 = 2k - 1$$

したがって、(i) と同様にして

$$\frac{3}{2} \leq k \leq 2$$

以下、 X が $D_3 \sim D_6$ にあるときも同様に考えると、点 X の動きうる範囲は右図のような大小の相似な六角形に挟まれた部分になる。



したがって、求める面積は、

$$E_1 \text{ の面積} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \quad E_2 \text{ の面積} = 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

より、
$$3 \times \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) = \frac{15}{2} \blacksquare$$

特に補足説明を必要とする問題でもありません。はっきり言えば、出来のいい中学生でも完答できる問題です。

ところで昨年（2020年）、現代数学社から『素数からはじめる数学研究』という、飯高茂氏と小学生2人の共著（？）ともいうべき本が出ましたが、高校生・受験生諸君！すでに君たちよりも年少の者たちが育ってきているのですよ。ぼやぼやしてはいられません。実は、先日私は、京都の現代数学社の社長さんに直接お会いして、その小学生たちの天才ぶりについて聞かされました。後生畏るべし、舌を巻くほかありませんでしたが、正直、たいへん嬉しくなって京都を後にしたのでした。ちなみに、飯高茂氏は学習院大学の名誉教授で、代数幾何学が御専門の高名な数学者です。

最後は、1992年東大・文科の“複素数”の絡む問題です。

【9・10】

x についての方程式

$$px^2 + (p^2 - q)x - (2p - q - 1) = 0$$

が解をもち、すべての解の実部が負となるような実数の組 (p, q) の範囲を pq 平面上に図示せよ。

(注) 複素数 $a + bi$ (a, b は実数, i は虚数単位) に対し, a をこの複素数の実部という。

【解説】

$$px^2 + (p^2 - q)x - (2p - q - 1) = 0 \cdots (*)$$

(i) $p = 0$ のとき

(*) より $-qx + q + 1 = 0$ で、これが解を持つ条件は $q \neq 0$ で、このとき

$$x = \frac{q+1}{q} < 0 \quad \therefore -1 < q < 0$$

(ii) $p \neq 0$ のとき

判別式を D とし, (*) の解を α, β とする。

(イ) $D \geq 0$ のとき

$\alpha < 0, \beta < 0$ である条件は, $\alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$

(ロ) $D < 0$ のとき

$\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$ とおけて,
 $a < 0$ より,

$$\alpha + \beta < 0$$

また,

$$\alpha\beta = a^2 + b^2 > 0$$

したがって、判別式の符号に拘わらず、
 解の実部が負となる条件は、解と係数
 の関係より

$$-\frac{p^2 - q}{p} < 0, \quad -\frac{2p - q - 1}{p} > 0$$

$\therefore p(q - p^2) > 0$, $p(2p - q - 1) < 0$
 すなわち,

$$[p > 0 \text{ かつ } q < p^2 \text{ かつ } q > 2p - 1]$$

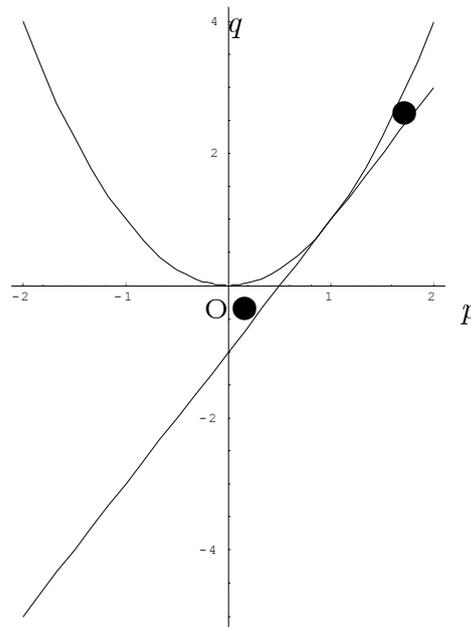
または

$$[p < 0 \text{ かつ } q > p^2 \text{ かつ } q < 2p - 1]$$

以上、(i), (ii) の考察から、実数の組 (p, q) の範囲は

$$[p = 0 \text{ かつ } -1 < q < 0] \text{ または } [p > 0 \text{ かつ } q < p^2 \text{ かつ } q > 2p - 1] \blacksquare$$

で、右上図の●を施した部分である。



直線 $q = 2p - 1$ は放物線 $q = p^2$ に接するのは明らかでしょう。また、 $p < 0$ かつ $q > p^2$ かつ $q < 2p - 1$ を満たす (p, q) は存在しません。

上の【解説】を読むと、本問はいかにもあっさりとして簡単そうに見えるかもしれませんが、

$$D = (p^2 - q)^2 + 4p(2p - q - 1) < 0$$

の場合について、まずこの不等式を満たす (p, q) の範囲を押さえて、それから解の実部が負となる条件を考えようとする受験生が相当数います。このような思考回路を選択した人は、ほとんどが“玉砕”しています。基本に立ち返って考えれば、**判別式 D の符号に関わらず、解の実部が負となる条件は簡単に了解できる**はずです。何かによっかかりながら考えるのではなく、“当たり前”のものを“当たり前”に自分自身で考えていく習慣を身に付けたいものです。

今回は、前回と今回で取り上げることができなかった“図形と方程式”問題の落ち穂拾いを行ないたいと思っています。

(河田直樹・かわたなおき)