

東大数学パトロール (10回)

—図形と方程式 (Ⅲ)

今回も“図形と方程式”のお話ですが，前2回で扱えなかった問題の“落ち穂拾い”を行っていきたいと思います．中には相当の難問もありますが，総合力が求められているこの分野の入試問題に，怯まずに挑戦してほしいと思います．

[1] 領域における最大・最小問題

不等式の表す領域における“最大・最小問題”は，入試における頻出テーマです．今回のトップ・バッターは，1996年東大・文科の問題です

【10・1】

xy 平面上の点 $P(a, b)$ に対し，正方形 $S(P)$ を連立不等式 $|x - a| \leq \frac{1}{2}$ ， $|y - b| \leq \frac{1}{2}$ の表す領域として定め，原点と $S(P)$ の点との距離の最小値を $f(P)$ とする．点 $(2, 1)$ を中心とする半径1の円周上を P が動くとき， $f(P)$ の最大値を求めよ．

【解説】

正方形 $S(P)$ は右図のように点 P を中心とする1辺の長さ1の正方形で，各辺は x 軸， y 軸に平行である．

点 P が，点 $(2, 1)$ を中心とする半径1の円周上を動くとき， $S(P)$ は $x > 0$ の部分を動く．

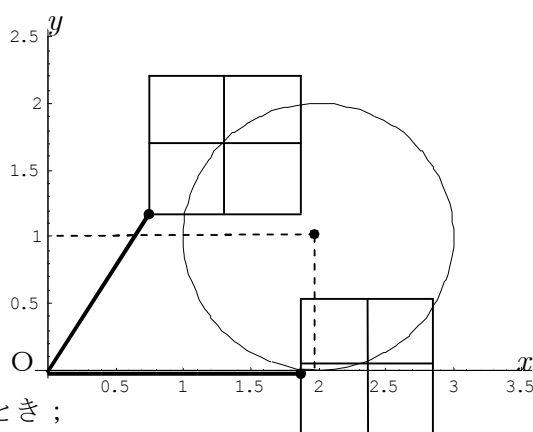
いま $f(P)$ を与える点を P_0 とすると，点 P_0 は，

(i) $S(P)$ と x 軸が共有点を持たないとき；

$$P_0 = \left(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2} \right) \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $S(P)$ が x 軸と共有点を持つとき； $P_0 = \left(a - \frac{1}{2}, 0 \right) \cdots \textcircled{2}$

ここで， $S(P)$ が x 軸と共有点をもつのは， $2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $b \leq \frac{1}{2}$ のとき．



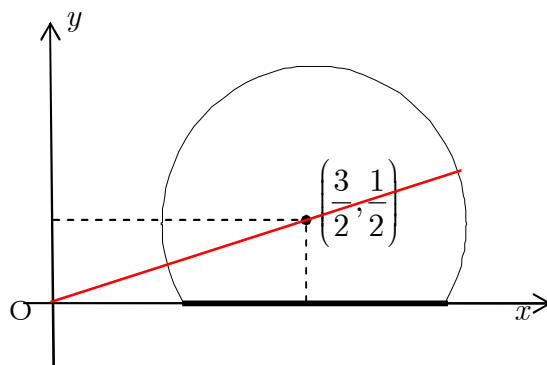
したがって、 $P_0 = (x, y)$ とすると、 $(a-2)^2 + (b-1)^2 = 1$ に注意して、①、②より

$$b > \frac{1}{2} \text{ のとき, } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1, \quad y > 0$$

$$b \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, } \frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \quad y = 0$$

よって、点 P_0 の軌跡は右図のようになるので、 $f(P)$ の最大値は、

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + 1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \blacksquare$$



特に難しいものではありませんが、**ポイントは正方形 $S(P)$ が x 軸と共有点をもつとき、そうでないときに場合分けして、“実験・観察”によって $f(P)$ を与える点 P_0 を確定する所**です。さらに、最小値 $f(P)$ の最大値を求める問題ですから、点 P_0 の軌跡を求めておくことも大切な要になります。こういう問題では、“**素直に、素朴に考えていく**”ことが大切です。

次も、**2004 年の東大・文科**の問題です。これも頻出定型問題で、素直に処理していけばいいだけです。

【10・2】

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2 \end{cases}$$

領域 D における $x+y$ の最大値、最小値を求めよ。

【解説】

$f(x) = x^2$, $g(x) = -2x^2 + 3ax + 6a^2$ とおくと、

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 3ax - 6a^2 = 0 \Leftrightarrow 3(x+a)(x-2a) = 0$$

$$\therefore x = -a, 2a$$

次に、 $x+y = k$ とおく。この直線が $y = g(x)$ に接するときの接点の x 座標は、

$$-x + k = -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3a+1}{4}\right)^2 + k - \frac{57a^2 + 6a + 1}{8} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

より, $x = \frac{3a+1}{4}$ である. また, $y = f(x)$ に接するときの接点の x 座標は

$$-x + k = x^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - k - \frac{1}{4} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

より, $x = -\frac{1}{2}$ である.

(i) 最大値について;

$$\frac{3a+1}{4} \leq 2a \text{ すなわち } a \geq \frac{1}{5} \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ より}$$

$$\text{最大値} = \frac{57a^2 + 6a + 1}{8} \blacksquare$$

$0 < a < \frac{1}{5}$ のとき, $x = 2a$ で最大で

$$\text{最大値} = 2a + 4a^2 \blacksquare$$

(ii) 最小値について;

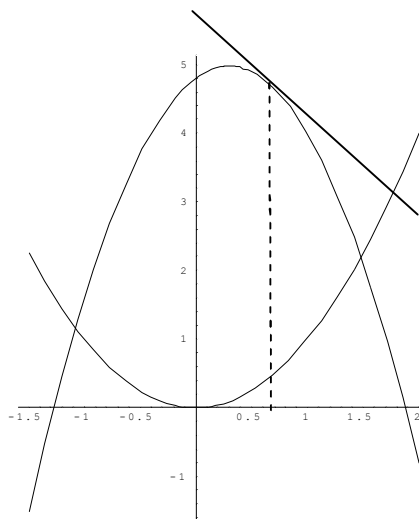
$$-a \geq -\frac{1}{2} \text{ すなわち } a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{ より}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ で最小で}$$

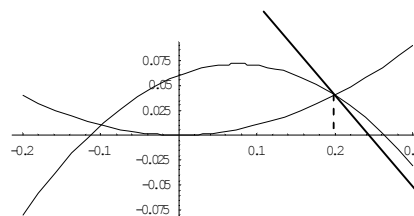
$$\text{最小値} = -\frac{1}{4} \blacksquare$$

$0 < a < \frac{1}{2}$ のとき, $x = -a$ で最小で

$$\text{最小値} = -a + a^2 \blacksquare$$



$$a = \frac{2}{5} \text{ のとき}$$



$$a = \frac{1}{10} \text{ のとき}$$

上の [解説] で, 特に問題とすべき点はありませんが, 文系受験生にとっては, ①の部分の計算が煩わしいかもしれませんね. すでに鬼籍に入った, 優秀な数学者であった小生の畏友は,

数学は, 一に計算, 二に計算, 三, 四がなく五に計算, 計算, 計算, また計算

が口癖でした. もちろんこれは, 具体的な計算を面倒がるいまどきの受験生に対する皮肉で, 数学における素晴らしいアイデアも明快な理論も, 具体的な計算と実験によって生まれてきていることを忘れてはなりません. 美しいニュートン (1642~1727) の古典力学の理論が, ヨハネス・ケプラー (1571~1630) のあの膨大な観測データから生まれているこ

とに思いを馳せてほしいものです。

文系の問題が続きましたので、次は **1998 年東工大** の問題を考えてみましょう。簡単そうに思えて、前2題に比べるとやはり少々難しいかもしれません。

【10・3】

$a > 0$ とし、 x, y が4つの不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + 3y \leq 12, \quad ax + \left(4 - \frac{3}{2}a\right)y \leq 8$$

を同時に満たしているとする。このとき $x + y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ。

【解説】

$$ax + \left(4 - \frac{3}{2}a\right)y \leq 8 \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a\left(x - \frac{3}{2}y\right) + (4y - 8) \leq 0$$

$$\therefore x \leq \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{a}\right)y + \frac{8}{a}$$

①で等号にして得られる直線は、 a の値にかかわらず、定点 $(3, 2)$ を通り、 x 切片は $\frac{8}{a}$ である。

また、直線 $x + y = k$ がこの定点を通るとき、 x 切片は 5 である。さらに、直線 $2x + 3y = 12$ は定点 $(3, 2)$ を通り、 x 切片は 6 である。

(i) $\frac{8}{a} \leq 5$ すなわち $a \geq \frac{8}{5}$ のとき；

図 I より、 k は $(x, y) = (3, 2)$ のとき最大
 $f(a) = \max k = 5$

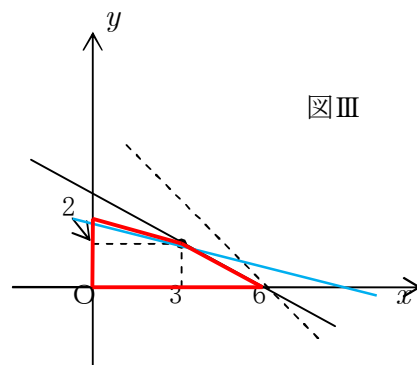
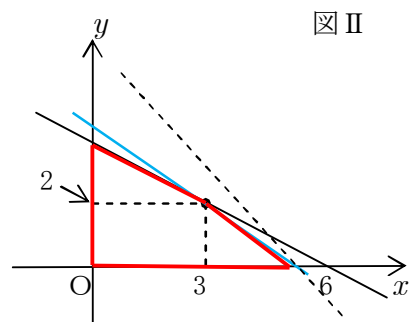
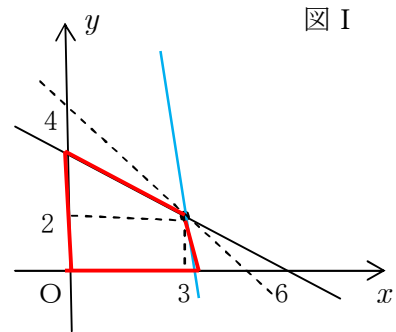
(ii) $5 \leq \frac{8}{a} \leq 6$ すなわち $\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{8}{5}$ のとき；

図 II より、 k は $(x, y) = \left(\frac{8}{a}, 0\right)$ のとき最大

$$f(a) = \max k = \frac{8}{a}$$

(iii) $6 \leq \frac{8}{a}$ すなわち $0 < a \leq \frac{4}{3}$ のとき；

図 III より、 k は $(x, y) = (6, 0)$ のとき最大



$$f(a) = \max k = 6$$

$$\text{以上, (i) ~ (iii) より, } f(a) = \begin{cases} 5 & \left(\frac{8}{5} \leq a \right) \\ \frac{8}{a} & \left(\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{8}{5} \right) \blacksquare \\ 6 & \left(0 < a \leq \frac{4}{3} \right) \end{cases}$$

本問のポイントは、不等式；

$$ax + \left(4 - \frac{3}{2}a \right) y \leq 8$$

をどのように“読解”するかという点にあります。この式を

$$y \geq mx + n \quad \text{または} \quad y \leq mx + n \quad (m, n \in \mathbb{R})$$

の形にしようとして、上の式を

$$\frac{8 - 3a}{2} y \leq -ax + 8$$

と変形し、 $a < \frac{8}{3}$, $a = \frac{8}{3}$, $a > \frac{8}{3}$ の3つに場合分けして考え始めると、これは面倒で厄介なことになります。ここは、 $a > 0$ に着目して上の[解説]のように

$$x \leq px + q \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

と変形するのがベストです。また、不等号を等号にして得られる直線が、 a の値にかかわらず定点(3,2)を通過することを読み取ること、さらに直線

$$2x + 3y = 12 \Leftrightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$

が、この定点を通過し、 x 切片が6、 y 切片が4であることも見抜いておきたいものです。

ここで、再び**2003年の東大・文科**の問題を取り上げてみます。平凡な問題に見えますが、案外出来の悪い問題です。これも場合分けがポイントです。

【10・4】

a, b を実数とする。次の4つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$x + 3y \geq a, \quad 3x + y \geq b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ。

【解説】

$$x + 3y = a \cdots \textcircled{1} \quad 3x + y = b \cdots \textcircled{2}$$

2直線①, ②の交点をPとすると,

$$P \left(\frac{-a + 3b}{8}, \frac{3a - b}{8} \right)$$

そこで, 点 (a, b) の条件を図Iのように

場合分けして考える.

(i) $a \leq 0, b \leq 0$ のとき;

$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ だから
原点Oで最小.

(ii) $\frac{a}{3} \leq b \leq 3a$ のとき;

D は図IIのようになるので, 点Pで
最小.

(iii) $a \geq 0, b \leq \frac{a}{3}$ のとき;

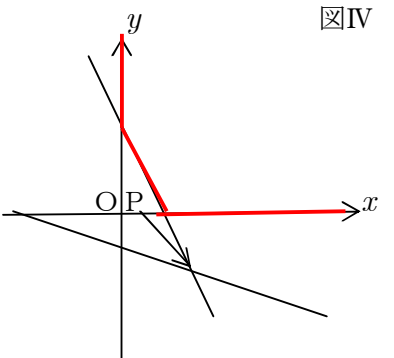
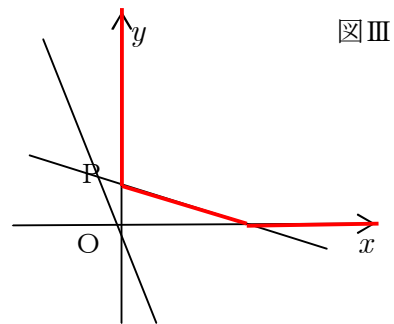
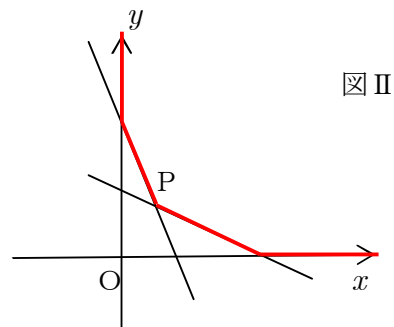
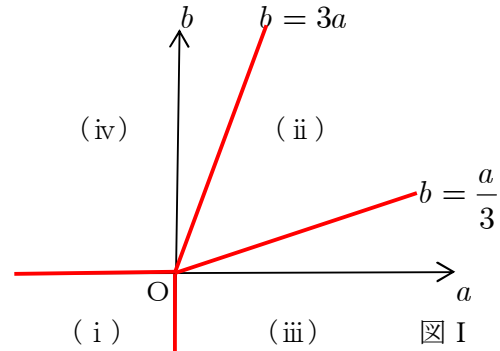
D は図IIIのようになるので, 点 $\left(0, \frac{a}{3}\right)$
で最小.

(iv) $b \geq 0, b \geq 3a$ のとき;

D は図IVのようになるので, 点 $\left(\frac{b}{3}, 0\right)$
で最小.

以上のことから, $x + y$ の最小値は,

$$\begin{cases} 0 & (a \leq 0, b \leq 0) \\ \frac{a+b}{4} & \left(\frac{a}{3} \leq b \leq 3a\right) \\ \frac{a}{3} & \left(a \geq 0, b \leq \frac{a}{3}\right) \\ \frac{b}{3} & (b \geq 0, b \geq 3a) \end{cases} \blacksquare$$



本問の“最初の一歩”は, 2直線 $x + 3y = a$ と $3x + y = b$ の交点を求め, [解説]のよ
うな場合分けを行うところです. しかし, この“最初の一歩”が思い浮かばずにまごつい
ている受験生が多いのが実情です. なお, 直線①の法線ベクトルが $(1, 3)$, 直線②のそれが

(3,1)であることに注目すれば、2直線の交点Pの位置が、 a, b の値によってどのように変化していくかは、ある程度“見えてくる”はずです。

さて、第1節の最後は、**1997年の東大・文理共通問題**です。素直に考えていけばよい、定型的な標準問題です。

【10・5】

a, b を正の数とし、 xy 平面の2点A($a, 0$)およびB($0, b$)を頂点とする正三角形をABCとする。ただし、Cは第1象限の点とする。

- (1) 三角形ABCが正方形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ に含まれるような (a, b) の範囲を求めよ。
 (2) (a, b) が(1)の範囲を動くとき、三角形ABCの面積 S が最大となるような (a, b) を求めよ。またそのときの S の値を求めよ。

【解説】

(1) 点Mを辺ABの中点とすると、

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OM} + \vec{MC} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}a - b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 a, b の条件は

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1, & 0 < b \leq 1 \\ 0 \leq \frac{a + \sqrt{3}b}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{\sqrt{3}a - b}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < a \leq 1, & 0 < b \leq 1 \\ a + \sqrt{3}b \leq 2 \\ \sqrt{3}a - b \leq 2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

これより点 (a, b) の存在範囲は右図。

ただし、境界は破線部分を除く。 \blacksquare

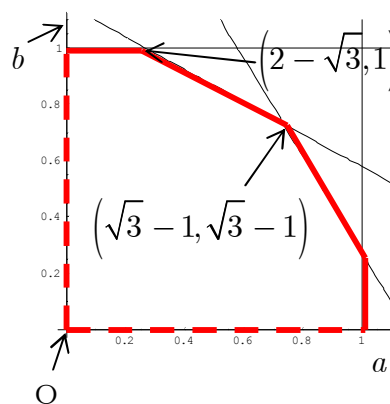
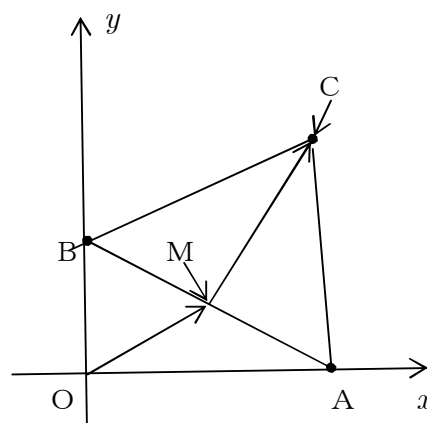
(2) P(a, b)とすると、

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}OP^2$$

したがって、

$$S : \text{最大} \Leftrightarrow OP^2 : \text{最大}$$

ここで、



$(a,b) = (1, 2 - \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}, 1)$ のとき,

$$OP^2 = 1^2 + (2 - \sqrt{3})^2 = 4(2 - \sqrt{3})$$

$(a,b) = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)$ のとき,

$$OP^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = 4(2 - \sqrt{3})$$

よって、 S が最大となる (a,b) は,

$$(1, 2 - \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}, 1), (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1) \blacksquare$$

また、 S の最大値は,

$$\max S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3 \blacksquare$$

[解説] では、 $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{BA}$, $\frac{|\overrightarrow{MC}|}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ に着目して、ベクトルを利用して点Cの座

標を求めましたが、“図形と方程式”の問題では、ベクトルを利用することはしばしば、このことを現役の受験生には是非頭においておいて欲しいと思います。

【2】条件を満たす点集合

条件を満たす点集合（領域）の問題は、前回も考えましたが、今回も“落ち穂拾い”と
いうことで、やや煩雑な問題を3題取り上げてみます。

最初は1994年東大・理科の問題。“距離”に関するものです。

【10・6】

xy 平面上の2点P, Qに対し、PとQを x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(P,Q)$ で表す。

(1) 原点O(0,0)と点A(1,1)に対し、 $d(O,P) = d(P,A)$ を満たす点P(x,y)の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(2) 実数 $a \geq 0$ に対し、点Q($a, a^2 + 1$)を考える。次の条件(*)を満足する点P(x,y)の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(*) 原点O(0,0)に対し、 $d(O,P) = d(P,Q)$ となるような $a \geq 0$ が存在する。

【解説】

(1) P(x,y)とすると、 d の定義から

$$d(O,P)=d(P,A) \Leftrightarrow |x| + |y| = |x-1| + |y-1|$$

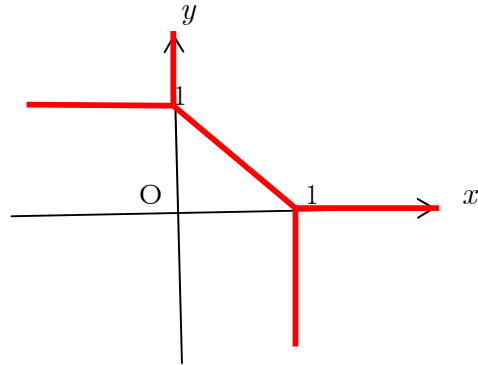
$$\therefore |x| - |x-1| = |y-1| - |y|$$

... ①

ここで、

$$\text{①の左辺} = \begin{cases} -1 & (x \leq 0) \\ 2x - 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$\text{①の右辺} = \begin{cases} 1 & (y \leq 0) \\ -2y + 1 & (0 \leq y \leq 1) \\ -1 & (y \geq 1) \end{cases}$$



であるから、点Pの範囲は

$$[x \leq 0, y \geq 1] \cup [x + y = 1, 0 \leq x \leq 1] \cup [x \geq 1, y \leq 0]$$

また、これを図示すると右図. ■

(2) (1) と同様に考えて、

$$d(O,P)=d(P,Q)$$

$$\Leftrightarrow |x| - |x-a| = |y-(a^2+1)| - |y| \quad \dots \text{②}$$

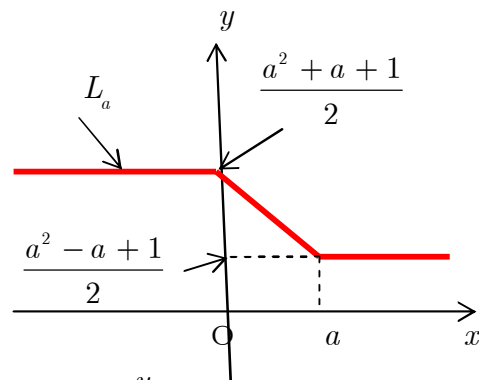
$$\text{②の左辺} = \begin{cases} -a & (x \leq 0) \\ 2x - a & (0 \leq x \leq a) \\ a & (x \geq a) \end{cases}, \quad \text{②の右辺} = \begin{cases} a^2 + 1 & (y \leq 0) \\ -2y + (a^2 + 1) & (0 \leq y \leq a^2 + 1) \\ -(a^2 + 1) & (y \geq a^2 + 1) \end{cases}$$

したがって、②を満たす図形は折れ線

$$L_a : \left[y = \frac{a^2 + a + 1}{2}, x \leq 0 \right]$$

$$\cup \left[x + y = \frac{a^2 + a + 1}{2}, 0 \leq x \leq a \right]$$

$$\cup \left[y = \frac{a^2 - a + 1}{2}, x \geq a \right]$$



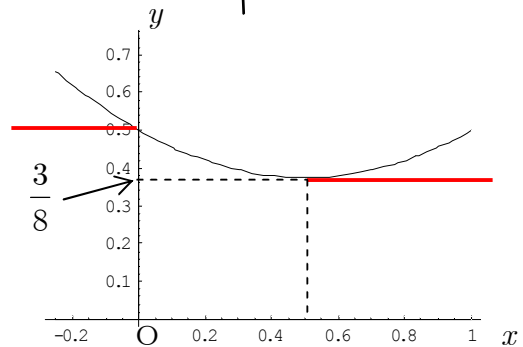
となり、 a が $a \geq 0$ を動くときの折れ線 L_a の通過領域が点Pの存在範囲である。そこで、

$$S(x_s, y_s) = \left(0, \frac{a^2 + a + 1}{2} \right)$$

$$T(x_t, y_t) = \left(a, \frac{a^2 - a + 1}{2} \right)$$

とおくと、

$$y_s = \frac{a^2 + a + 1}{2} \geq \frac{1}{2}$$



$$y_t = \frac{x_t^2 - x_t + 1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(x_t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \geq \frac{3}{8}$$

となり、点Tは、放物線 $y = \frac{x^2 - x + 1}{2}$ 上を移動していくことに注目すると、

点Pの存在範囲は、

$$\left[y \geq \frac{1}{2}, x \leq 0 \right] \cup \left[y \geq \frac{1}{2}(x^2 - x + 1), 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right] \cup \left[y \geq \frac{3}{8}, x \geq \frac{1}{2} \right] \cdots (**)$$

となり、これを図示すると、右上図ようになる。 ■

(2) の点P (x, y) の存在範囲は、(**) を参考にして、各自で上図に斜線部分を入れて下さい。

本問では、 xy 平面上の2点P (a, b), Q (c, d) の距離 $d(P, Q)$ が **PとQをx軸またはy軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値** で定められています。すなわち、 $d(P, Q) = |c - a| + |d - b|$ ということ、普通のユークリッド幾何では

$$d(P, Q) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

となるところですが、2点間の距離が上のように定義されたいのが面白いところです。

一般に、ある集合 S の2点 x, y (x, y は座標ではなく“点”だと思って下さい) に対して、関数 $d(x, y)$ が次の条件 (i) ~ (iii) を満たしているとき、 d を“**S上の距離関数**”と言います。

(i) $d(x, y) \geq 0$, ただし等号は $x = y$ のときに限る。

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) S の任意の3点 x, y, z に対して、 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

この条件は、私たちの素朴な日常の距離感覚を抽象して得られたもので、“**距離とは何か**”という本質を物語っています。まあ、かなり“エエカゲン”な定義と感ぜられるかもしれませんが、数学屋はこれらの条件を満たしてさえいれば、 d を距離関数と考えます。

たとえば、閉区間 $[0, 1]$ で定義された実数値をとる連続関数 x, y に対して

$$d(x, y) = \max \left\{ |x(t) - y(t)| \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

と定めると、“関数の間に定義された距離”ということになります。実は、この話の先には数学の広大な世界がひろがっているのですが、この話はここで打ち切ることにしましょう。

さて、次は **2007年東大・理科** の問題。オーソドックスなものですが、やはり“理系”の問題、並みの東大受験生にはかなり面倒な問題と感ぜられるでしょう。

【10・7】

座標平面上の2点P, Qが, 曲線 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$)上を自由に動くとき, 線分PQを1:2に内分する点が動く領域をDとする. ただし, $P=Q$ のときは $R=P$ とする.

- (1) a を $-1 \leq a \leq 1$ を満たす実数とすると, 点 (a, b) がDに属するための b の条件を a を用いて表せ.
 (2) Dを図示せよ.

【解説】

(1) $P(p, p^2), Q(q, q^2)$ ($|p| \leq 1, |q| \leq 1$)とおくと, $R\left(\frac{2p+q}{3}, \frac{2p^2+q^2}{3}\right)$

Rが動く領域がDであるから, 点 (a, b) がDに属するための条件は,

$$a = \frac{2p+q}{3} \dots \textcircled{1} \quad b = \frac{2p^2+q^2}{3} \dots \textcircled{2}$$

を満たす p, q ($|p| \leq 1, |q| \leq 1$)が存在することである.

①より, $q = 3a - 2p$ で, これを②に代入すると,

$$b = \frac{1}{3}\{2p^2 + (3a - 2p)^2\} \quad \therefore b = 3a^2 - 4ap + 2p^2 \dots \textcircled{3}$$

p が $-1 \leq p \leq 1$ の範囲を動くとき, b のとりうる値の範囲を求めておけばよい.

$y = x^2$ は y 軸対称であるから, $0 \leq a \leq 1$ としておき, a をこの範囲で固定し, ③に注意して, b を p の2次関数と考えて,

$$b = f(p) = 2p^2 - 4ap + 3a^2 = 2(p - a)^2 + a^2$$

とおく. $-1 \leq q \leq 1$ であるから, ①より

$$-1 \leq 3a - 2p \leq 1$$

$$\therefore \frac{3a-1}{2} \leq p \leq \frac{3a+1}{2} \dots \textcircled{4}$$

④および $-1 \leq p \leq 1$ を満たす点 (a, p) の存在範囲を図示すると右図で, これは線分

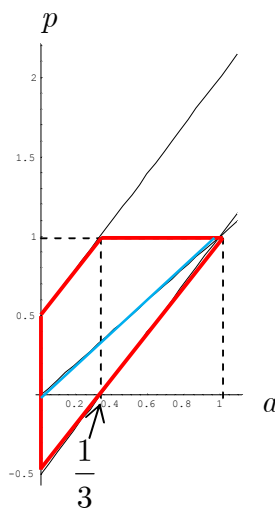
$$p = a \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を含む. したがって,

(i) $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$ のとき, $a - \frac{3a-1}{2} \leq \frac{3a+1}{2} - a$ だから,

$$f(a) \leq b \leq f\left(\frac{3a+1}{2}\right)$$

$$\therefore a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{2} \dots \textcircled{5}$$



(ii) $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ のとき, $a - \frac{3a-1}{2} \leq 1-a$ だから

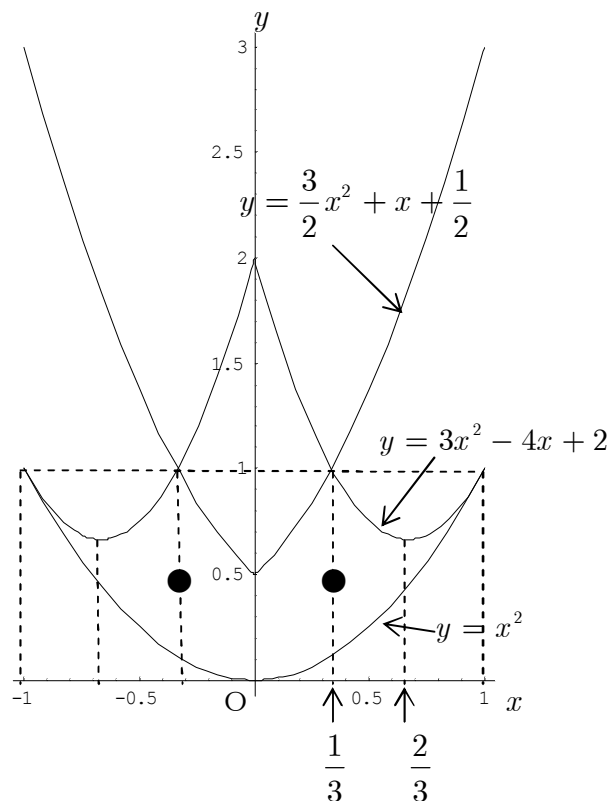
$$\therefore a^2 \leq b \leq 3a^2 - 4a + 2 \cdots \textcircled{6}$$

$-1 \leq a \leq 0$ については, ⑤, ⑥を b 軸に関して対称移動したもので, a を $-a$ にかえておけばよい. よって, 求める条件は,

$$\begin{cases} a^2 \leq b \leq 3a^2 + 4a + 2 & \left(-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}\right) \\ a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 - a + \frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{3} \leq a \leq 0\right) \\ a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{2} & \left(0 \leq a \leq \frac{1}{3}\right) \\ a^2 \leq b \leq 3a^2 - 4a + 2 & \left(\frac{1}{3} \leq a \leq 1\right) \end{cases} \blacksquare$$

<注> 絶対値記号を用いて, $\begin{cases} a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 + |a| + \frac{1}{2} & \left(|a| \leq \frac{1}{3}\right) \\ a^2 \leq b \leq 3a^2 - 4|a| + 2 & \left(\frac{1}{3} \leq |a| \leq 1\right) \end{cases}$ としてもよい.

(2) (1) の結果において, a を x , b を y にすると D が得られて, それを図示すると右図のようになる. ただし, 境界はすべて含む. \blacksquare



上の [解説] を読んで頂ければ分かるかと思いますが, 本問のポイントは

$$b = 2p^2 - 4ap + 3a^2 = 2(p - a)^2 + a^2 \quad \left(\frac{3a-1}{2} \leq p \leq \frac{3a+1}{2} \right)$$

を、 p の2次関数と捉え、定義域 $\frac{3a-1}{2} \leq p \leq \frac{3a+1}{2}$ における、 b の取り得る値の範囲を求める点にあります。そのために、この関数の対称軸 $p = a$ の位置に着目して場合分けするのですが、上の[解説]の(i)、(ii)がその場合分けなのです。

本問の冒頭部分でも述べましたが、要するに上の問題は定義域の定められた2次関数の最大・最小問題で、きわめてオーソドックスなものです。

次も**東大・理科の問題、2014年のもの**です。前問【10・7】の類題と言ってもよい問題です。このブログで過去問研究の大切さは繰り返し強調してきましたが、以下の問題を見れば、それがあらためて実感できるでしょう。

【10・8】

座標平面の原点をOで表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$)上の点Pと、線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-2 \leq x \leq 0$)上の点Qが、線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く。このとき線分PQの通過する領域をDとする。

- (1) s を $0 \leq s \leq 2$ を満たす実数とすると、点 (s, t) がDに入るような t の範囲を求めよ。
- (2) Dを図示せよ。

【解説】

(1) $\overrightarrow{OP} = p(1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{OQ} = q(-1, \sqrt{3})$ ($0 \leq p, q \leq 2$)とおき、 $R(s, t)$ とする。

$$|\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OQ}| = 6 \text{ だから, } 2p + 2q = 6$$

$$\therefore p + q = 3 \dots \textcircled{1}$$

$$q = 3 - p \text{ だから, } 0 \leq q \leq 2 \text{ より}$$

$$0 \leq 3 - p \leq 2 \quad \therefore 1 \leq p \leq 2 \dots \textcircled{2}$$

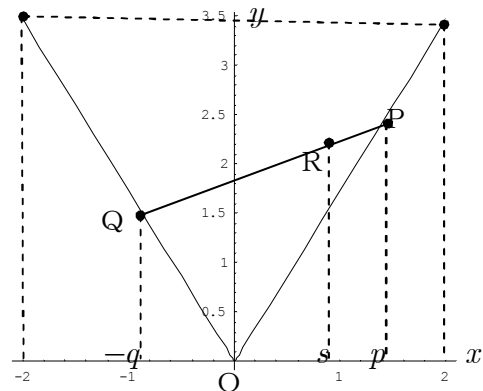
また、 $\overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{QP}$ より、

$$(s + q, t - \sqrt{3}q) \parallel (p + q, \sqrt{3}(p - q))$$

$$\therefore (p + q)(t - \sqrt{3}q) = \sqrt{3}(p - q)(s + q)$$

①を用いて q を消去し、 t について解くと

$$t = -\frac{1}{\sqrt{3}}(2p - 3)\{p - (s + 3)\} - \sqrt{3}(p - 3)$$



$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\{2p^2 - (2s+6)p + 3s\} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(p - \frac{s+3}{2}\right)^2 + \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$$

ここで、点R(s,t)がDに入る条件は、Rが線分PQ上にあることだから、①とから

$$-q \leq s \leq p \Leftrightarrow -(3-p) \leq s \leq p \quad \therefore s \leq p \leq s+3 \cdots \textcircled{3}$$

sを $0 \leq s \leq 2$ の範囲で固定し、

$$f(p) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(p - \frac{s+3}{2}\right)^2 + \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$$

とおき、pが②かつ③を満たすとき、f(p)の取り得る値の範囲を求める。

(i) $0 \leq s \leq 1$ のとき；

$$s \leq 1 \leq p \leq 2 \leq s+3 \text{ であり、} \frac{3}{2} \leq \frac{s+3}{2} \leq 2 \text{ だから、}$$

$$f(1) \leq f(p) \leq f\left(\frac{s+3}{2}\right) \quad \therefore -\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$$

(ii) $1 \leq s \leq 2$ のとき；

$$1 \leq s \leq 2 \leq s+3 \text{ であり、} 2 \leq \frac{s+3}{2} \text{ だから、}$$

$$f(s) \leq f(p) \leq f(2) \quad \therefore \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s+4}{\sqrt{3}}$$

以上、(i)、(ii)より、tの範囲は、

$$\begin{cases} -\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}} & (0 \leq s \leq 1) \\ \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s+4}{\sqrt{3}} & (1 \leq s \leq 2) \end{cases} \quad \blacksquare$$

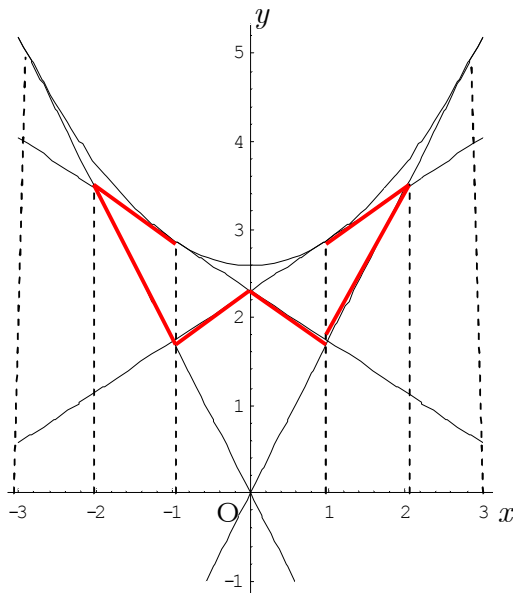
(2) $0 \leq s \leq 2$ のときは、(1)

の結果から、

$$\begin{cases} -\frac{x-4}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x^2+9}{2\sqrt{3}} & (0 \leq x \leq 1) \\ \sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x+4}{\sqrt{3}} & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \cdots \textcircled{3}$$

$-2 \leq s \leq 0$ のときは、不等式③の表す領域を、y軸に関して対称に移動したものになる。

よって、Dを図示すると、右図のようになる。ただし、境界はすべて含む。 \blacksquare



ここで、少し補足説明をしておきます。 $y = \frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}}$ と $y = \frac{x + 4}{\sqrt{3}}$ を連立すると、

$$\frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}} = \frac{x + 4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

また、 $y = \frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}}$ と $y = \sqrt{3}x$ を連立すると、

$$\frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$$

ですから、2直線 $y = \frac{x + 4}{\sqrt{3}}$ と $y = \sqrt{3}x$ は放物線 $y = \frac{x^2 + 9}{\sqrt{3}}$ にそれぞれ $x = 1, 3$ で接していることが分かります..

[解説] を読まれてお分かりのように、本問もまた t を p の2次関数と考え、 t の取り得る値の範囲を考えていけばよいだけの話です。[解説] を読み流す前に、鉛筆と紙をとり出し、是非一から自分で考えてほしい問題です。本問は、高校2年生であれば容易に完答可能な問題です。

[3] 落ち穂拾い

いよいよ最終節です。あと4題取り上げます。少し面倒な計算が続いたので、“口直し”の意味で、比較的シンプルな問題を考えてみましょう。

最初は、**今年(2021年)の2月に京大・理系で出題された問題**です。“外心”と“垂心”が登場しますが、これに“重心”を加えると、“外心(O)、垂心(H)、重心(G)”の有名な関係、すなわち

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

が浮かび上がってくるはずです。

【10・9】

xy 平面上において、2点 $B(-\sqrt{3}, -1)$ 、 $C(\sqrt{3}, -1)$ に対し、点 A は次の条件(*)を満たすとする。

$$(*) \angle BAC = \frac{\pi}{3} \text{ かつ点 } A \text{ の } y \text{ 座標は正}$$

次の各問に答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の外心の座標を求めよ。
- (2) 点 A が条件(*)を満たしながら動くとき、 $\triangle ABC$ の垂心の軌跡を求めよ。

【解説】

(1) Oを原点, D(0,-2)とすると,

$$\angle BOC = \angle BDC = \frac{2\pi}{3}$$

だから, 円周角と中心角の関係と条件 (*) より, 点Aは, 原点Oあるいは点Dを中心とする半径2の円周上に存在する. ところがAのy座標は正だから, $\triangle ABC$ の外心 ($\triangle ABC$ の外接円の中心) の座標は,

$$(0, 0) \blacksquare$$

(2) A(p,q)とおくと, (1) の考察から

$$p^2 + q^2 = 4, \quad q > 0 \cdots \textcircled{1}$$

垂心をH(X,Y), $\triangle ABC$ の重心をGとすると

$$G\left(\frac{p}{3}, \frac{q-2}{3}\right)$$

であり,

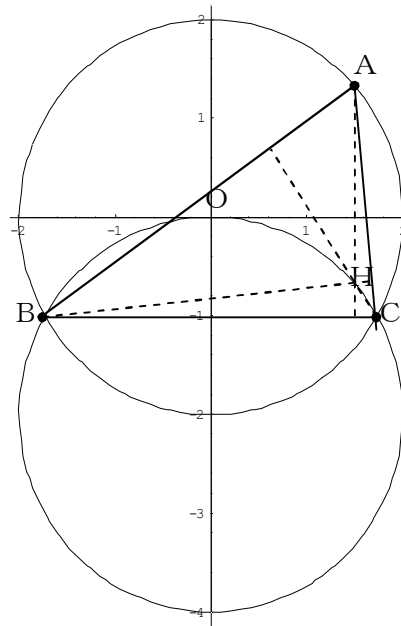
$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \cdots (**)$$

だから,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{p}{3} \\ \frac{q-2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q-2 \end{pmatrix} \quad \therefore p = X, \quad q = Y + 2 \cdots \textcircled{2}$$

よって, ①, ②から垂心Hの軌跡は

$$X^2 + (Y + 2)^2 = 4, \quad Y > -2 \blacksquare$$



(1) は, 円周角と中心角の関係が, そして (2) では三角形の外心, 重心, 垂心の関係がポイントです. いずれも, 入試ではしばしば顔を出すテーマです.

因みに, $\triangle ABC$ の外心をO, 垂心をH, 重心をHとすると,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

となります.

上の【解説】を読んで頂ければお分かりのように, 上は定型的な基本問題で, 京大に合格するためには, 是非とも完答しなければなりません. そして, この問題, 高校2年生でも完答可能のはずです.

次は, **2010年の東工大**の問題です. この問題もさほど難しくはないはずです.

【10・10】

a を正の定数とする．原点を O とする座標平面上に定点 $A=A(a,0)$ と異なる動点 $P=P(x,y)$ をとる．次の条件

$$A \text{ から } P \text{ に向けた半直線上の点 } Q \text{ に対し, } \frac{AQ}{AP} \leq 2 \text{ ならば } \frac{QP}{OQ} \leq \frac{AP}{OA}$$

を満たす P からなる集合を D とする． D を図示せよ．

【解説】

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP} = (a,0) + t(x-a,y) \\ &= (a+tx-ty, ty) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

とおけて, $\frac{AQ}{AP} \leq 2$ より, $0 \leq t \leq 2$ で

$$\frac{QP}{OQ} \leq \frac{AP}{OA} \Leftrightarrow \frac{QP}{AP} \leq \frac{OQ}{OA}$$

$$\therefore \frac{|t-1|}{1} \leq \frac{\sqrt{(a+tx-ta)^2 + (ty)^2}}{a}$$

$$\Leftrightarrow a^2(t-1)^2 \leq (tx-a(t-1))^2 + t^2y^2 \Leftrightarrow t^2x^2 - 2tx \cdot a(t-1) + t^2y^2 \geq 0$$

$$\therefore (x^2 - 2ax + y^2)t^2 + 2ax \geq 0 \dots \textcircled{1}$$

$t=0$ のとき, ①はすべての (x,y) について成り立つ．ただし, $(x,y) \neq (a,0)$.
 $0 < t \leq 2$ のとき,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (x^2 - 2ax + y^2)t + 2ax \geq 0 \dots \textcircled{2}$$

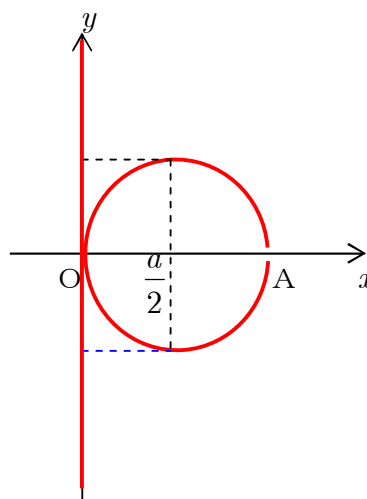
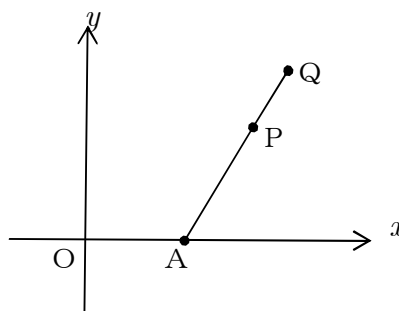
いま $f(t) = (x^2 - 2ax + y^2)t + 2ax$ とおくと, ②が $0 < t \leq 2$ なる t に対して成り立つ条件は

$$f(0) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad f(2) \geq 0$$

すなわち,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

よって, 領域 D は右図で, 境界は点 $A(a,0)$ 以外はすべて含む. ■



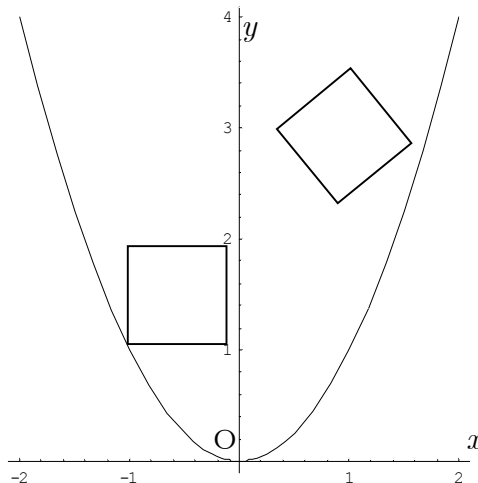
上の【解説】で特に難しいところはないはず．敢えて言えば, $t=0$ と $0 < t \leq 2$ の場合分けのところででしょうか．この問題も高校2年生の学力で十分対応できるはずです．

次は、1983年の東大・理科の問題です。どのように場合分けして考えていくかがポイントになります。

【10-11】

xy 平面上の $y \geq x^2$ で表される領域を D とする。 D に含まれる1辺の長さ t の正方形で、各辺が座標軸と平行または 45° の角をなすものをすべて考える。

このとき、これらの正方形の中心の y 座標の最小値を t の関数として表し、そのグラフをかけ。



【解説】

$$D: y \geq x^2 \cdots \textcircled{1}$$

正方形の中心を $C(a, b)$ とすると、領域 D は y 軸について対称だから、 $a \geq 0$ の場合を考えておけば十分である。

(i) 正方形の各辺が座標軸に平行なとき；

正方形が D に含まれる条件は、頂点 $\left(a + \frac{t}{2}, b - \frac{t}{2}\right)$ が $\textcircled{1}$ を満たすことであるから、

$$b - \frac{t}{2} \geq \left(a + \frac{t}{2}\right)^2 \quad \therefore b \geq \left(a + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t}{2} \geq \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}$$

(ii) 正方形の各辺が座標軸と 45° の角をなすとき；

正方形が D に含まれる条件は、2つの頂点 $\left(a + \frac{t}{\sqrt{2}}, b\right)$, $\left(a, b - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ が $\textcircled{1}$ を満たすこと

であるから、 $b \geq \left(a + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdots \textcircled{2}$ $b - \frac{t}{\sqrt{2}} \geq a^2 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ から、 $b \geq \frac{t^2}{2} \cdots \textcircled{4}$ $\textcircled{3}$ から、 $b \geq a^2 + \frac{t}{\sqrt{2}} \geq \frac{t}{\sqrt{2}} \cdots \textcircled{5}$

ここで、 $\frac{t^2}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{t(t - \sqrt{2})}{2}$ だから、 $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ の共通部分は

$$0 < t < \sqrt{2} \text{ のとき, } b \geq \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad t \geq \sqrt{2} \text{ のとき, } b \geq \frac{t^2}{2}$$

(i), (ii) から,

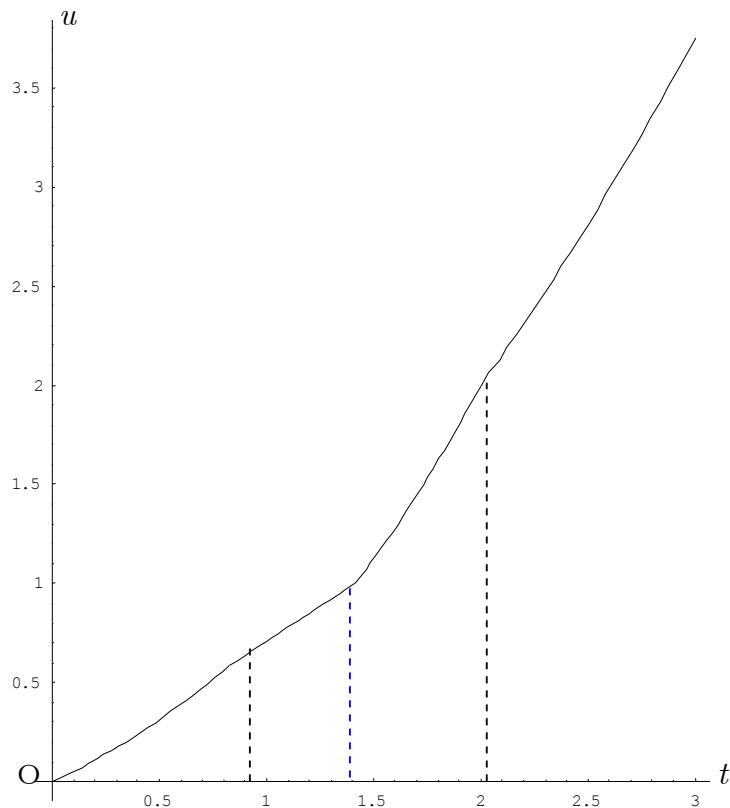
$$0 < t < \sqrt{2} \text{ のとき, } \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right) - \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{t\{t - 2(\sqrt{2} - 1)\}}{4}$$

$$t \geq \sqrt{2} \text{ のとき, } \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right) - \frac{t^2}{2} = \frac{t(2 - t)}{4}$$

よって, 正方形の中心の座標 b の最小値を $f(t)$ とすると,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} & (0 < t \leq 2(\sqrt{2} - 1)) \\ \frac{t}{\sqrt{2}} & (2(\sqrt{2} - 1) < t \leq \sqrt{2}) \\ \frac{t^2}{2} & (\sqrt{2} < t \leq 2) \\ \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} & (t > 2) \end{cases} \quad \blacksquare$$

また, これより $u = f(t)$ のグラフは以下のようなになる. \blacksquare



領域 D が y 軸に関して対称であることに着目して、正方形の中心の x 座標 a が、 $a \geq 0$ の場合を考えておけば十分である、という点は、案外気づきにくいようです。また、上の [解説] を読めば何でもないのでありますが、正方形が領域 D に含まれる条件を、数式でキチンと押さえることも難しく感じる受験生が多いようです。

今回取り上げた問題からも実感されたと思いますが、数学では

与えてある条件を、どのように数式化するか

が、重要なポイントになります。“**所与の条件の数式化**” を常に念頭において、問題に取り組んでほしいものです。

さて、今回のパトロールの最後の問題です。1986 年東大・理科のもの、この問題では、“数学Ⅲ” (?) も登場します。

【10・12】

xy 平面において、座標 (x, y) が不等式 $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$ を満たすような点 $P(x, y)$ のつくる集合を D とする。3 点 $A(a, 0), B(0, b), C\left(c, \frac{1}{c}\right)$ を頂点とし、 D に含まれる 3 角形 ABC はどのような場合に面積が最大となるか。また面積の最大値を求めよ。ただし、 $a \geq 0, b \geq 0, c > 0$ とする。

【解説】

点 $C\left(c, \frac{1}{c}\right)$ における曲線 $y = \frac{1}{x}$ の接線の方

程式は、 $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ より

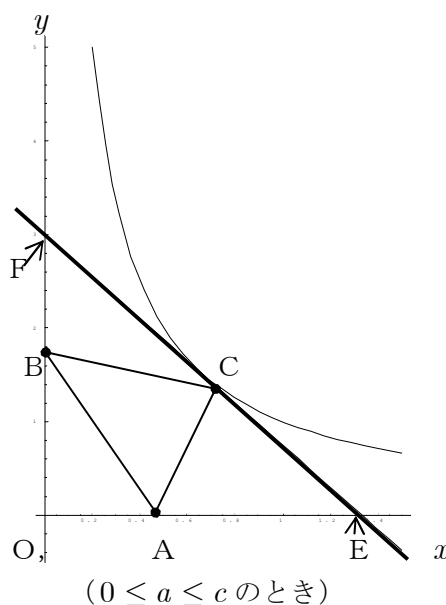
$$y = -\frac{1}{c^2}(x - c) + \frac{1}{c}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{c^2}x + \frac{2}{c}$$

この接線と x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ

$E(2c, 0), F\left(0, \frac{2}{c}\right)$ とする。

曲線 $xy = 1 (x > 0)$ が下に凸だから三角 $\triangle ABC$ が領域 D に含まれる条件は、2 点 A, B がこの曲線より下側または接線上にあることである。すなわち、



$$0 \leq a \leq 2c, \quad 0 \leq b \leq \frac{2}{c}$$

(i) $0 \leq a \leq c$ のとき ;

$$\triangle ABC \leq \triangle AFC \leq \triangle OFC = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{2}{c} = 1$$

(ii) $c \leq a \leq 2c$ のとき ;

$$\triangle ABC \leq \triangle AOC \leq \triangle EOC = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \frac{1}{c} = 1$$

(i), (ii) から, 三角形ABCの面積が最大になるのは, 任意の c に対して,

$$A(0,0), B\left(0, \frac{2}{c}\right) \quad \text{または} \quad A(2c,0), B(0,0)$$

となるときで, 最大値は, 1 ■

上の [解説] では, 点C $\left(c, \frac{1}{c}\right)$ における接線の方程式を, 微分法で求めましたが, 2次曲

線上の点 (x_0, y_0) における, よく知られた接線の方程式の公式 ;

$$\frac{1}{2}(x_0 y + x y_0) = 1$$

を用いて,

$$\frac{1}{2}\left(c \cdot y + x \cdot \frac{1}{c}\right) = 1 \quad \therefore y = -\frac{1}{c^2}x + \frac{2}{c}$$

と求めることもできます.

本問の設定は極めて単純素朴ですが, この問題でも大切なことは, “**実験・観察・発見**” であり, 点Cの位置に着目して場合分けして考えていくところです. 東大数学の特徴の一つは,

具体的な実験によって発見を求める問題

が多いということです. このことは是非頭に入れておいて欲しいことで, 東大数学では, 定理・公式の機械的な運用だけでは解決できない問題が多く出題されるのです. つまり, “ほんとうに考える” ことが, 求められているのです.

次回からは, いよいよ “場合の数と確率” をテーマにした問題を取り上げていきます. この分野からの出題が多いのも東大数学の大きな特色なのです.

(河田直樹・かわたなおき)